

Dr Tihomir Latinović, Dr Mehmed Arnautović, Mr. Savo Kalabić

Dr Tihomir Latinović, Dr Mehmed Arnautović, Mr. Savo Kalabić

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE



Banja Luka, septembar 2016. godine

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

**ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I
ELEKTRONIKE**

Recenzenti:

Prof. Dr Vera Bajović

Redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Prof. Dr Miroslav Prša

Redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Izdavač:

Univerzitet za poslovni inženjering i menadžment Banja Luka

Za izdavača:

Ilija Džombić, direktor

Dizajn korica:

Jelena Mladenović

Štampa:

”Point štamparija” Banja Luka

Tiraž: 100 komada

Banja Luka, 2016. godine

-

ISBN

© Zabranjeno fotokopiranje, preštampavanje i drugi oblici umnožavanja ove knjige. Sva prava zadržava izdavač.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka namijenjena je studentima ne elektrotehničkih fakulteta, u okviru kojih se izučavaju osnove elektrotehnike i elektronike. Radi toga je pokriveno veliko područje Elektrotehnike i Elektronike. Autori su imali u vidu svoj dugogodišnji rad na Mašinskom fakultetu u Banjoj Luci, Mašinskom fakultetu u Bihaću i obrazovnom centru Rajlovac, gdje su radili i godinama već uče studente, kao profesori i asistenti.

Želja je bila da se zadovolje prevashodno studenti prethodno navedenih fakulteta, a onda i ostali studenti, kao i svi oni kojima Elektrotehnika i Elektronika treba u tekućem radu.

Obrađene su oblasti Elektrostatike, Istosmjernih struja, Magnetizma, Naizmjeničnih struja, Asinhronih motora, Fizike poluprovodnika, elektronskih sklopova i ispravljača,

U uvodnom dijelu svake glave, radi lakšeg savladavanja rješavanja određenih zadataka, dati su osnovni pojmovi i definicije iz teorije.

Na kraju Zbirke dati su Prilozi od I do V u kojima su za lakše praćenje i rješavanje određenih zadataka date osnove iz oblasti energetske nivoa elektrona prema Borovom modelu vodikovog atoma, osnovni elementi iz matematike koji su korišteni u objašnjavanju osnovnih fizikalnih procesa, praktične formule iz oblasti ispravljača i stabilizatora napona, te u četvrtom i petom prilogu date su potrebne fizičke konstante i parametri poluprovodničkih materijala, kao i osnovne formule korištene u zbirci.

Zadaci su u svakoj glavi podijeljeni u dvije grupe i to zadaci koji se obrađuju i rješavaju na auditornim vježbama, te zadaci za vježbu namijenjeni za samostalan rad studenta.

Autori

Banja Luka, avgust 2016

SADRŽAJ

1. ELEKTROSTATIKA	7
1.1 TAČKASTO NAELEKTRISANJE	7
1.2 ELEKTRIČNO POLJE TAČKASTOG NAELEKTRISANJA	8
1.3 ELEKTRIČNO POLJE I ELEKTRIČNI POTENCIJAL	9
1.4 KAPACITIVNOST I NAČINI VEZIVANJA KONDENZATORA ...	21
1.5 PLOČASTI KONDENZATOR SA DIELEKTRIKOM	25
1.6 NAČINI VEZIVANJA KONDENZATORA I PRORAČUN EKVIVALENTNE KAPACITIVNOSTI	25
1.7 ENERGIJA U ELEKTROSTATIČKOM POLJU	33
2. OMOV ZAKON. SNAGA. I i II Kirhofov zakon, džulovi toplotni gubici.....	36
3. PRVI I DRUGI KIRHOFOV ZAKON.....	42
4. MAGNETIZAM	50
5. NAIZMENIČNA STRUJA. ELEKTRIČNA KOLA	55
5.1 KOMPLEKSNI BROJEVI.....	55
6. TROFAZNA NAIZMJENIČNA STRUJA.....	56
6.1 TROFAZNI SISTEMI	112
7. ELEKTROMOTORI.....	127
8. ELEKTRONIKA.....	132
8.1 KOMPENZOVANI POLUPROVODNICI.....	136
8.2 ZADACI IZ FIZIKE POLUPROVODNIKA I ELEKTRONIKE	139

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

8.3 POLUPROVODNIČKA DIODA U ELEKTRIČNOM KOLU.....	144
8.4 STATIČKA I DINAMIČKA ANALIZA POJAČAVAČA U SPOJU SA ZAJEDNIČKIM EMITEROM	161
8.5 ANALITIČKI POSTUPAK. ODREĐIVANJE STATIČKE RADNE TAČKE.....	165
8.6 DINAMIČKA ANALIZA POJAČAVAČA U SPOJU SA ZAJEDNIČKIM EMITEROM.....	168
9. ISPRAVLJAČI – ZADACI.....	174
10. PRILOZI	184
11. LITERATURA	210

ELEKTROTEHNIKA I ELEKTRONIKE

1. ELEKTROSTATIKA

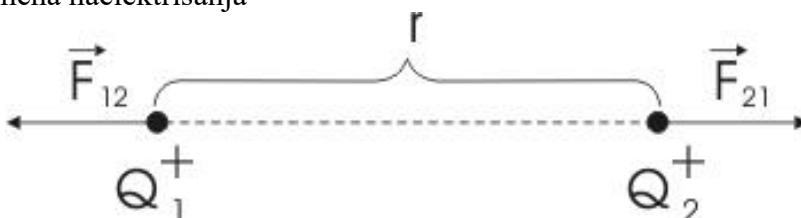
1.1 TAČKASTO NAELEKTRISANJE

Kulonova sila između dva tačkasta naelektrisanja

$$F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} [N] \dots\dots\dots 1.1$$

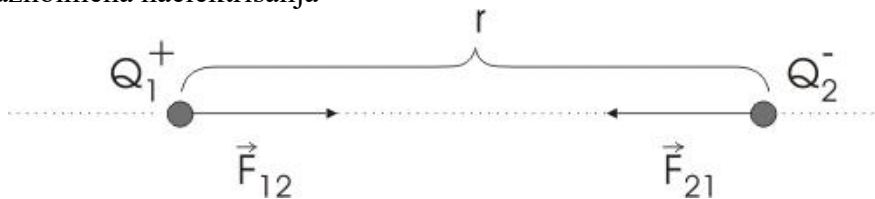
$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \dots\dots\dots 1.2$$

Istoimena naelektrisanja



Sl. 1. Kulonov zakon za tačkasta naelektrisana tijela različitog naelektrisanja

Raznoimena naelektrisanja



Sl. 2. Kulonov zakon za tačkasta naelektrisana tijela identičnog naelektrisanja

1.2 ELEKTRIČNO POLJE TAČKASTOG NAELEKTRISANJA

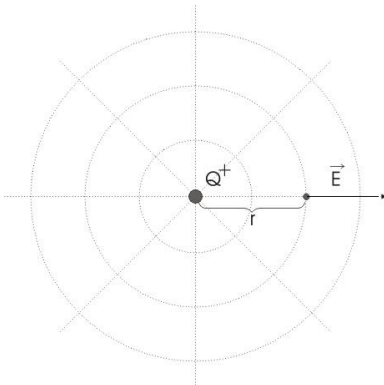
Intenzitet (jačina) električnog polja računamo prema izrazu:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} = k \frac{Q}{r^2} \left[\frac{V}{m} \right] \dots\dots\dots 1.3$$

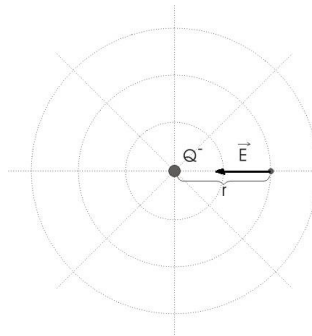
Međusobni odnos električnog polja , sile i naboja $\vec{F} = \vec{E} \cdot Q[N]$

U SI sistemu, jedinica za silu je njutn (N), a za jačinu električnog polja

$$\frac{\text{njutn}}{\text{kulon}} = \frac{N}{C}, \text{ odnosno } \frac{\text{volt}}{\text{metru}} = \frac{V}{m}, \text{ što se češće koristi.}$$

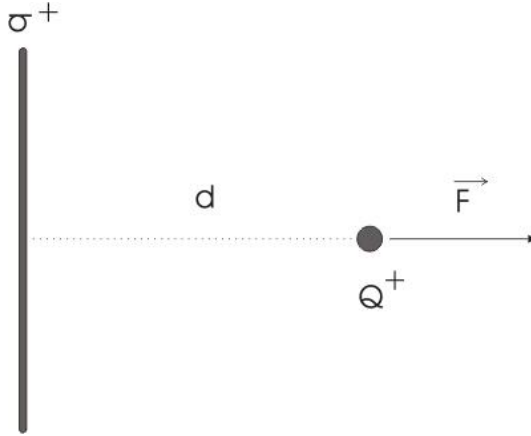


Sl. 3. Pozitivni naboj



Sl. 4. Negativni naboj

1.3 ELEKTRIČNO POLJE I ELEKTRIČNI POTENCIJAL



Sl. 5. Dejstvo sile na tačkasto naelektrisanje

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{V}{m} \right] \dots\dots\dots 1.4$$

Beskonačna ravnina naelektrisana površinskim nabojem σ (1.4).

Električni potencijal homogenog električnog polja (1.5):

$$\varphi = \frac{W}{Q} [V] \dots\dots\dots 1.5$$

W - rad potrošen za dovođenje naelektrisanja Q u posmatranu tačku,
 Q - posmatrano naelektrisanje.

Električni potencijal tačkastog naelektrisanja:

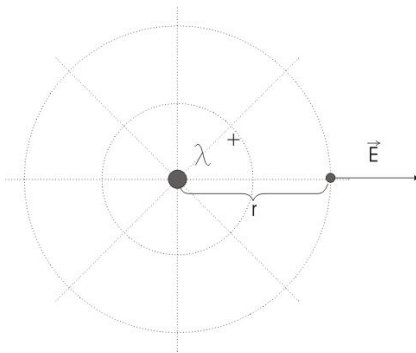
$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot Q \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{ref}} \right] [V] \dots\dots\dots 1.6$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

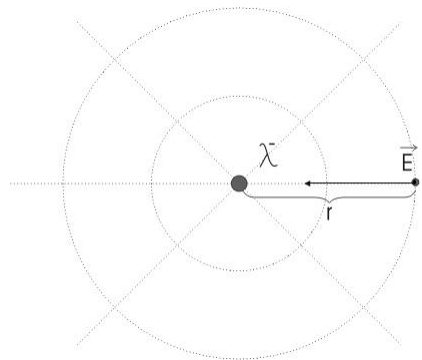
Vrlo dugi ravni provodnik sa linijskim naelektrisanjem λ ima polje (1.7) i potencijal (1.8)

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r} \left[\frac{V}{m} \right] \dots\dots\dots 1.7$$

$$\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \ln \frac{r_{ref}}{r} [V] \dots\dots\dots 1.8$$



Sl. 6. Smjer polja za λ^+



Sl.7. Smjer polja za λ^-

ZADACI:

- 1) Dva tačkasta naelektrisanja istog predznaka $Q_1 = 85\mu C$ i $Q_2 = 16.6nC$ nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju $r=6,5cm$. Izračunajte vrijednost sile između tih naelektrisanja, njen smjer i orijentaciju (privlačna, odbojna).

Rješenje:

Silu međudelovanja između tih naelektrisanja računamo prema Kulonovom zakonu (1.9):

$$F = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

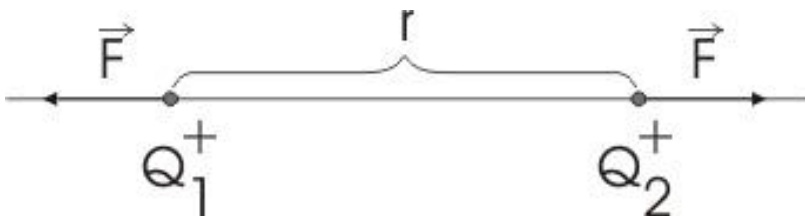
$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

$$F = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{85\mu C \cdot 16,6nC}{(6,5cm)^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{85 \cdot 10^{-6} \cdot 16,6 \cdot 10^{-9} C^2}{(6,5 \cdot 10^{-2} m)^2} = \\ = 9 \cdot 10^9 \cdot 33,39 \cdot 10^{-11} N = 300,57 \cdot 10^{-2} N \approx 3N$$

$$F \approx 3N$$

Naelektrisanja se odbijaju

Smjer vektora sile F prikazan je na sledećoj slici:



Sl. 8. Kulonova sila za jednako naelektrisane jedinične naboje

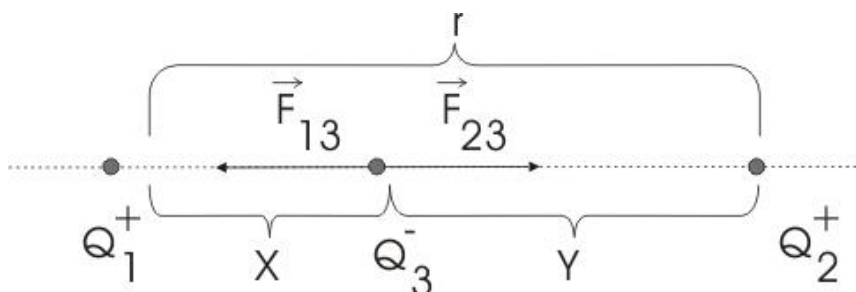
- 2) Dva tačkasta naelektrisanja istog predznaka $Q_1 = 2 \cdot 10^{-7} C$ i $Q_2 = 8 \cdot 10^{-7} C$ nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju $r=9cm$, a na pravcu između njih nalazi se tačkasto naelektrisanje Q_3 nepoznate

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

vrijednosti (Sl.9) . Odrediti na kojoj se udaljenosti treba nalaziti Q_3 od navedenih naelektrisanja, pa da rezultantna sila bude jednaka nuli.

Rješenje

Položaj naelektrisanja Q_3 prikazan je na sledećoj slici



Sl. 9. Kulonova sila za različito naelektrisanja 3 naboja

Iz uslova da su sile u datom položaju Q_3 međusobno jednake, tj. da je rezultantna sila jednaka nuli, na osnovu Kulonovog zakona imamo:

$$F_{1,3} = k \frac{Q_1 \cdot Q_3}{x^2} \quad F_{2,3} = k \frac{Q_2 \cdot Q_3}{y^2} \Rightarrow k \frac{Q_1 \cdot Q_3}{x^2} = k \frac{Q_2 \cdot Q_3}{y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{y^2}$$

Sa slike je $r = x + y$, odakle je $y = r - x$, pa prethodni izraz možemo pisati u obliku:

$$\frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{y^2} \Rightarrow \frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{(r-x)^2} \Rightarrow \frac{Q_1}{x^2} = \frac{Q_2}{r^2 - 2rx + x^2}$$

Uvrštavanjem vrijednosti za naboje, dobijemo:

$$\frac{2 \cdot 10^{-7} C}{x^2} = \frac{8 \cdot 10^{-7} C}{r^2 - 2rx + x^2} \Rightarrow$$

$$4x^2 = r^2 - 2rx + x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2rx - r^2 = 0 \dots\dots\dots 1.11$$

Odakle je na osnovu (1.11) slijedi:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \cdot 9 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9^2}}{2 \cdot 3} =$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{1296}}{6} = \frac{-18 \pm 36}{6} \Rightarrow$$

Naravno uzimamo samo pozitivno rastojanje, tj.

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm 36}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-18 + 36}{6} = \frac{18}{6} = 3cm$$

Za y dobijemo $y = r - x = 9 - 3 = 6cm$.

- 3) Dva raznoimena tačkasta naelektrisanja $Q_1 = 10^{-6} C$ i $Q_2 = -2 \cdot 10^{-6} C$ nalaze se u vazduhu na rastojanju $r_1 = r_2 = 6cm$ (prema prikazu na slici) od pozitivnog naboja $Q_1 = 10^{-6} C$. Izračunajte vrijednost rezultantne sile između tih naelektrisanja na naboj Q_3 , i skicirajte njen smjer i orijentaciju na slici.

Rješenje:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Sile dejstva na naelektrisanje Q_3 su :

$$F_{1,3} = k \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{10^{-6} C \cdot 10^{-6} C}{(6 \cdot 10^{-2} m)^2} = \frac{9}{36} \cdot 10N$$

$$F_{2,3} = k \frac{Q_2 \cdot Q_3}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6} C \cdot 10^{-6} C}{(6 \cdot 10^{-2} m)^2}$$

$$F_{2,3} = -\frac{18}{36} \cdot 10N = -\frac{1}{2} \cdot 10N$$

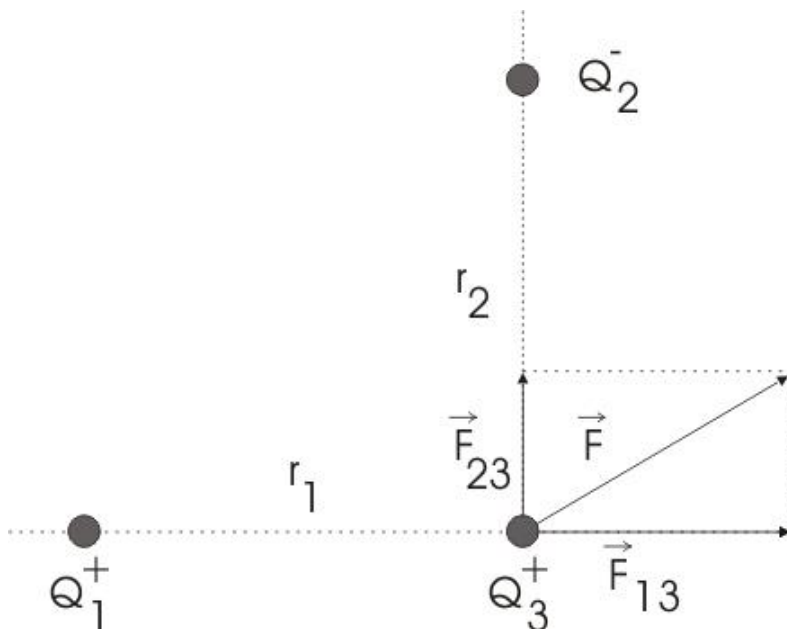
Smjer rezultantne sile F prikazan je na slici 9.

$$F = \sqrt{(F_{1,3})^2 + (F_{2,3})^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{36} \cdot 10N\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \cdot 10N\right)^2} =$$

$$F = \sqrt{(F_{1,3})^2 + (F_{2,3})^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{36} \cdot 10N\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \cdot 10N\right)^2} =$$

$$= 10N \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 10N \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$5N \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} N = 5 \cdot 1,11N = 5,59N \approx 5,6N$$



Sl. 10. Rezultatno djelovanje naelektrisanja

- 4) Na naelektrisano tijelo $Q = 10^{-12} \text{ C}$ djeluje električna sila $F = 3 \cdot 10^{-5} \text{ N}$. Izračunati vrijednost električnog polja u kojoj se nalazi posmatrano naelektrisano tijelo.

Rješenje:

Električno polje računamo prema izrazu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} = k \frac{Q}{r^2} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

Međusobni odnos električnog polja, sile i naboja $\vec{F} = \vec{E} \cdot Q [\text{N}]$, odakle je vrijednost električnog polja u kojoj se nalazi posmatrano naelektrisano tijelo:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\vec{F} = \vec{E} = \frac{F}{Q} = \frac{3 \cdot 10^{-5} \text{ N}}{2 \cdot 10^{-12} \text{ C}} = 1,5 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right] = 15 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right] = 15 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$$

- 5) Tačkasti naboj Q_1 nalazi se u vazduhu i na udaljenosti $r=10$ cm stvara jačinu električnog polja $E_1 = 5000 \text{ V/m}$. Kolika će sila djelovati na naboj $Q_2 = 10^{-9} \text{ C}$, koji je udaljen za $a = 5 \text{ cm}$ od naboja Q_1 ?

Rješenje:

Iz $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} = k \frac{Q}{r^2} \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]$ možemo izračunati naelektrisanje

$$Q_1 = \frac{E \cdot r^2}{k} = \frac{5000 \text{ V/m} \cdot (10 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}} = \frac{(50 \text{ V/m}) \cdot \text{m}^2}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}} = \frac{5}{9} \cdot 10^{-9} \frac{\text{VC}^2}{\text{Nm}} =$$

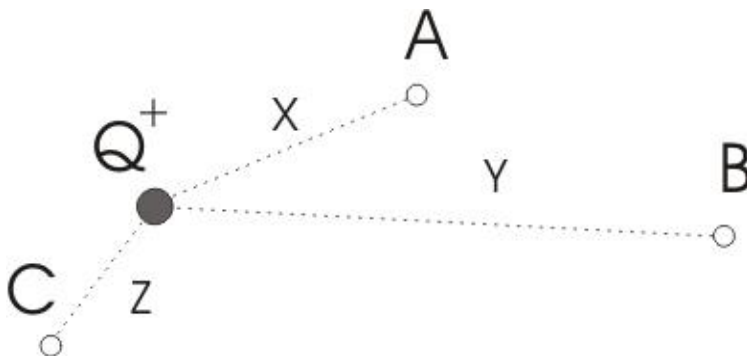
$$= \frac{5}{9} \cdot 10^{-9} \frac{\text{V}}{\text{Nm}} \cdot \text{C}^2 = \frac{5}{9} \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{C}} \cdot \text{C}^2 = \frac{5}{9} \cdot 10^{-9} \cdot \text{C}$$

Sada je sila koja djeluje na naboj $Q_2 = 10^{-9} \text{ C}$, koji je udaljen za $a = 5 \text{ cm}$ od naboja Q_1 , data izrazom:

$$F_{1,2} = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{\frac{5}{9} \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(5 \text{ m})^2} = \frac{1}{5} \cdot 10^{-9} \text{ N} = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ N} = 20 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

Zadaci za vježbanje:

- 6) Odrediti smjer i vrijednost električnog polja u tačkama A,B,i C prikazanim na slici. Poznato je : $Q=30\text{nC}$, $x=5\text{cm}$, $y=10\text{ cm}$, i $z= 2\text{ cm}$.



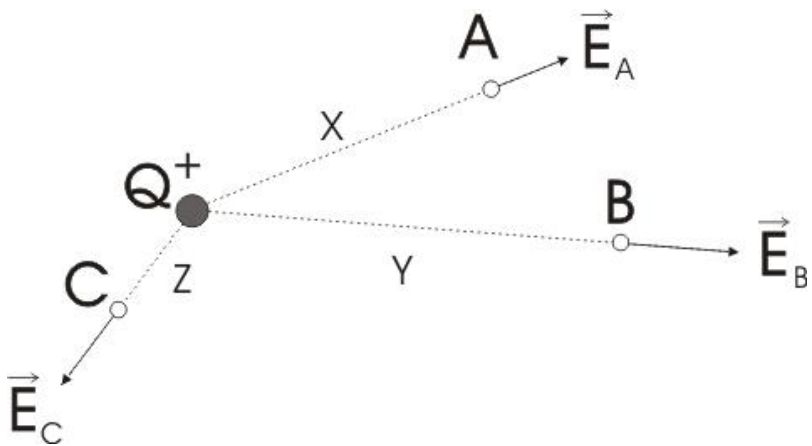
Sl. 11. Uz određivanje smjera i vrijednosti električnog polja u tačkama A, B,i C

Rješenje:

$$E_A = 10,785 \cdot 10^3 \text{ V/m}, \quad E_B = 2,696 \cdot 10^3 \text{ V/m}, \quad E_C = 67,408 \cdot 10^3 \text{ V/m}.$$

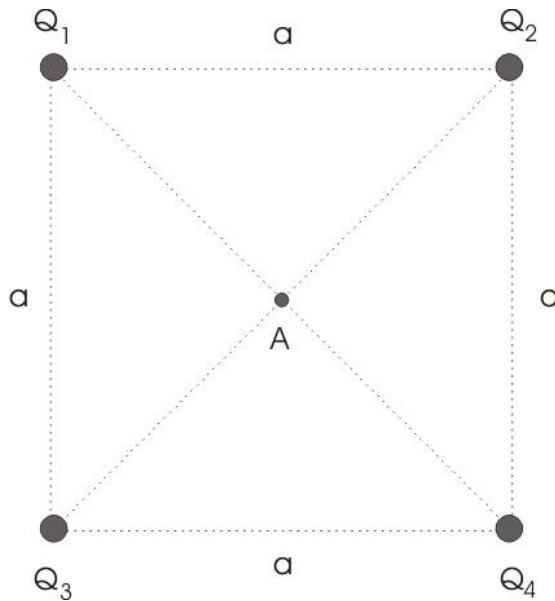
Smjer električnog polja u tačkama A,B i C prikazan je na sledećoj slici.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE



Sl. 12. Prikaz smjera električnog polja u tačkama A, B i C

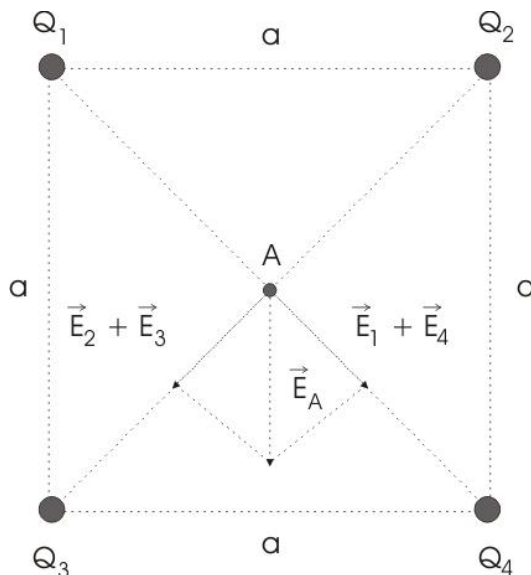
- 7) U vrhovima kvadrata stranice $a=0,5$ cm nalaze se tačkasti naboji $Q_1 = Q_2 = 10^{-12} C$ i $Q_3 = Q_4 = -10 \cdot 10^{-12} C$. Odrediti vrijednost i smjer vektora električnog polja u tački A prema slici 13:



Sl. 13. Raspored naelektrisanja u vrhovima kvadrata

Rješenje:

$E_A = 1,116V/m$. Smjer električnog polja E_A u tački A prikazan je na slici 12:

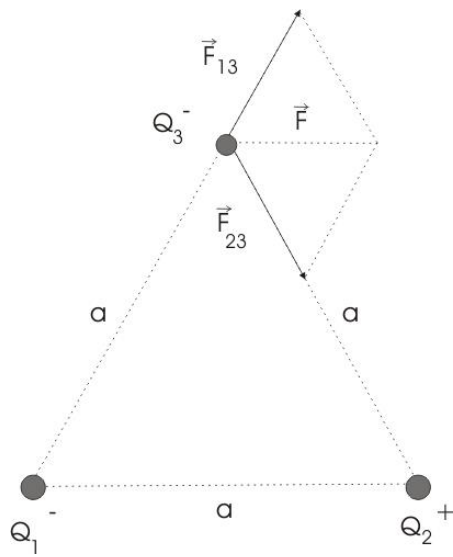


Sl. 14. Smjer električnog polja E_A u tački A

- 8) Tri naelektrisana tijela $Q_1 = Q_2 = 10^{-10} C$ i $Q_3 = -10^{-10} C$, nalaze se u vakumu u tjemenu jedakostraničnog trougla čija je stranica dužine $a=1cm$ kao na slici 13. Odredite vrijednost i smjer rezultantne sile koja djeluje na naelektrisano tijelo Q_3 , imajući u vidu da je i naboj Q_1 negativnog predznaka.

Rješenje:

$F = 0,899 \cdot 10^{-6} N$. Smjer električne sile na naboj Q_3 prikazan je na sljedećoj slici:



Sl. 15. Sile u naelektrisanju Q_3

1.4 KAPACITIVNOST I NAČINI VEZIVANJA KONDENZATORA

1.4.1 Pločasti kondenzator sa dielektrikom

Dielektrik ubačen u električno polje se polarizuje, odnosno dolazi do formiranja električnih dipola, kao posljedica interatomskog pomjeranja naelektrisanja u dielektriku. Dio energije izvora prelazi u energiju elektrostatičkog polja, a to je elektrostatička energija dielektrika. Pomjeranje električnog naboja (tovara) u atomu je posljedica djelovanja elektrostatičkog polja i što je polje jače, polarizacija je veća, a dielektrik je u pobuđenom stanju stvorenom na račun dovođenja energije na kondenzator, odnosno dielektrik u kondenzatoru. Iščezavanjem polja, atomi se vraćaju u prvobitna stanja, pri čemu energija dielektrika prelazi u električni rad, koji se pretvara u toplotnu energiju. Za pločasti kondenzator električno polje je (1.13):

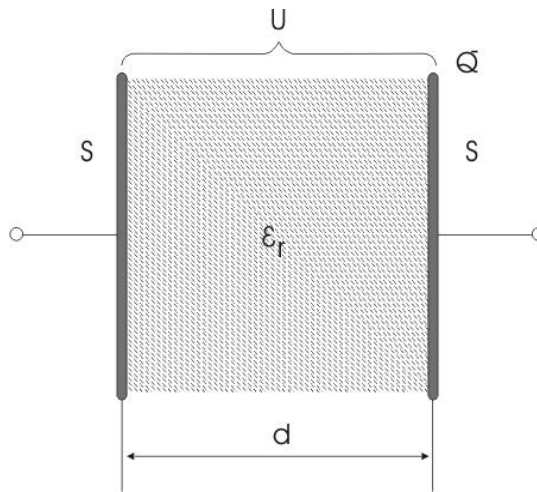
$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} \dots\dots\dots 1.13$$

Q -količina elektriciteta na pločama kondenzatora, od kojih svaka ima površinu S , odnosno :

$$E = \frac{U}{d} \dots\dots\dots 1.14$$

U - napon na pločama kondenzatora

Električno polje zavisi od napona U i rastojanja ploča d kao na (1.14).



Sl. 16. Sl. Pločasti kondenzator ispunjen dielektrikom

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_p \frac{S}{d} [F]$$

$$U = E \cdot d [V]$$

$$D = \epsilon_0 \cdot \epsilon_p \cdot E = \frac{Q}{S} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_p \cdot S} = \frac{U}{d} \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$Q = C \cdot U = \epsilon_0 \cdot \epsilon_p \cdot S \cdot E = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_p \cdot S \cdot E}{d} [C]$$

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{E \cdot D}{2} \cdot S \cdot d [J]$$

Električni naboj uzrokuje u električnom polju, što znači i kod elektrostatickog polja u izolatoru, koji nazivamo dielektrik, tzv. **električni tok** (Ψ). Ima značenje broja električnih silnica i praktično je jednak naboju Q , tj. $\Psi = Q [C]$.

D -vektor gustoće električnog pomaka \vec{D} i predstavlja količnik influenciranog naelektrisanja u dielektriku, koji postavimo u električno polje pločastog kondenzatora i površine dielektrika:

$$D = \frac{Q}{S} \left[\frac{C}{m^2} \right] \quad \text{ili} \quad D = \left[\frac{As}{m^2} \right] \dots\dots\dots 1.15$$

Jačinu električnog polja izražavamo na isti način kao i Kulonovu silu, samo što jačinu polja jednog naelektrisanja računamo prema referentnom naelektrisanju $Q=1C$, tzv. **jediničnom naboju**, tako da jačinu polja možemo izraziti:

$$E = k \frac{Q \cdot 1}{l^2} \left[\frac{V}{m} \right] \quad \text{-----} 1.16$$

Izrazimo li gustinu električnog toka ili električni pomak D pomoću jačine električnog polja, dobijemo:

$$D = \frac{\Psi}{S} \equiv \frac{\Psi}{S} = \frac{E \cdot l^2}{k \cdot S} \dots\dots\dots 1.17$$

Ako posmatramo električni pomak posmatranog prostornog naboja na površini kugle $S = 4r^2\pi$, poluprečnika $r = 1$, tad je:

$$D = \frac{Q}{S} = \frac{E \cdot l^2}{k \cdot S} = \frac{E \cdot l^2}{k \cdot 4r^2\pi} = \left| \text{Za } l = r \Rightarrow \right| = \frac{E}{4 \cdot \pi \cdot k} = \varepsilon \cdot E$$

Odakle vidimo da je gustina električnog pomaka D proporcionalna jačini električnog polja E , a koeficijent proporcionalnosti je dielektrična konstanta ε :

$$D = \varepsilon \cdot E$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Dielektrična konstanta za bilo koji električni izolator kao dielektrik je $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ i izražava se u C/Vm ili As/Vm. Takva dielektrična konstanta za vakum i prostorni naboj iznosi:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \cdot 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm} \right] \dots\dots\dots 1.18$$

Ako posmatramo diferencijal zatvorene površine dS kroz koju prolaze silnice električnog polja E , koje potiču od naelektrisanja obuhvaćenih posmatranom zatvorenom površinom, tada integral skalarnog proizvoda vektora jačine električnog polja E i vektora dS , koji reprezentuje površinu dS , daje ukupni tok vektora jačine polja kroz tu zatvorenu površinu :

$$\Psi_E = \oint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \dots\dots\dots 1.19$$

Ako unutar zatvorene površine nema naboja, tj. ako je $Q=0$, tad je

$$\Psi_E = \oint_S E \cdot dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 0$$

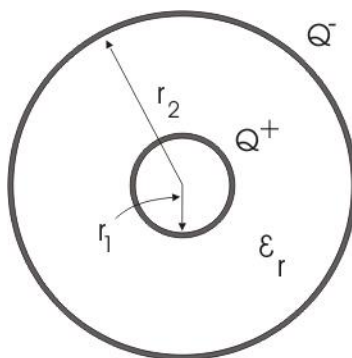
Analogno, imamo da je ukupni tok vektora D u nehomogenom polju

$$\Psi_D = \oint_S D \cdot dS = Q.$$

1.4.2 Kuglasti kondenzator

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} \left[\frac{V}{m} \right] \qquad C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} [F]$$

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] [V] \qquad D(r) = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E(r)$$



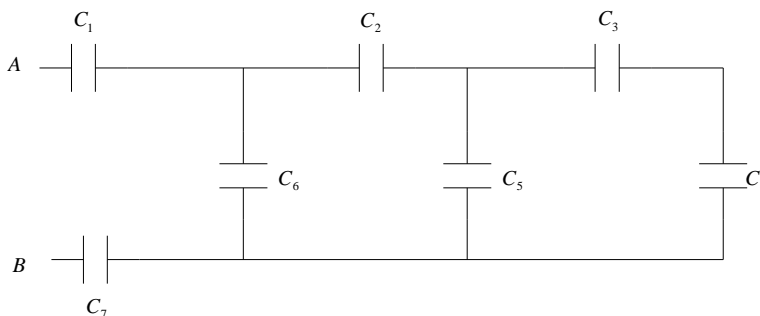
Sl. 17. Kuglasti kondenzator

1.6 NAČINI VEZIVANJA KONDENZATORA I PRORAČUN EKVIVALENTNE KAPACITIVNOSTI

9) Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost između tačaka A i B kola na Sl. 18.

Dato je :

$$C_1 = 100pF, C_2 = 120pF, C_3 = 80pF, C_4 = 300pF, C_5 = 250pF, \\ C_6 = 200pF, C_7 = 350pF.$$



Sl. 18 Šema za zadatak 9)

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Rješenje:

$$C_{3,4} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{80pF \cdot 300pF}{80pF + 300pF} = 63,1pF$$

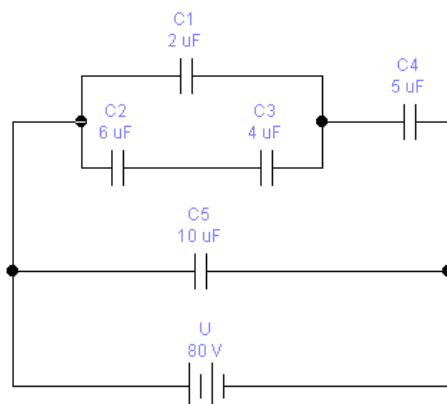
$$C_5' = C_3 + C_{3,4} = 250pF + 63,1pF = 313,1pF \quad C_{2,5}' = \frac{C_2 \cdot C_5'}{C_2 + C_5'} = \frac{120pF \cdot 313,1pF}{120pF + 313,1pF}$$

$$C_6' = C_6 + C_{2,5}' = 200pF + 86,7pF = 286,7pF$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_6'} + \frac{1}{C_7} = \frac{1}{100pF} + \frac{1}{286,7pF} + \frac{1}{350pF} = \frac{1}{0,016207pF}$$

$$\Rightarrow C_e = 61,7pF$$

- 10) Veza kondenzatora kao na slici, priključena je na napon $U=80V$. Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost i opterećenje (naelektrisanje) ekvivalentnog kondenzatora.



Sl. 19. Mješovita veza kondenzatora

Dato je: $C_1 = 2\mu F$, $C_2 = 6\mu F$, $C_3 = 4\mu F$, $C_4 = 5\mu F$, $C_5 = 10\mu F$.

Rješenje:

$$C_{2,3} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6}} = \frac{24 \cdot 10^{-12}}{10 \cdot 10^{-6}} = 2,4 \mu F$$

$C_{A,D} = C_1 + C_{2,3} = 2 \cdot 10^{-6} + 2,4 \cdot 10^{-6} F = 4,4 \mu F$

$$C_{A,B} = \frac{C_{A,D} C_4}{C_{A,D} + C_4} = \frac{4,4 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{4,4 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} = \frac{2,2 \cdot 10^{-12}}{9,4 \cdot 10^{-6}} = 2,3 \mu F$$

$$C_e = C_{A,B} + C_5 = 2,3 \mu F + 10 \mu F = 12,3 \mu F.$$

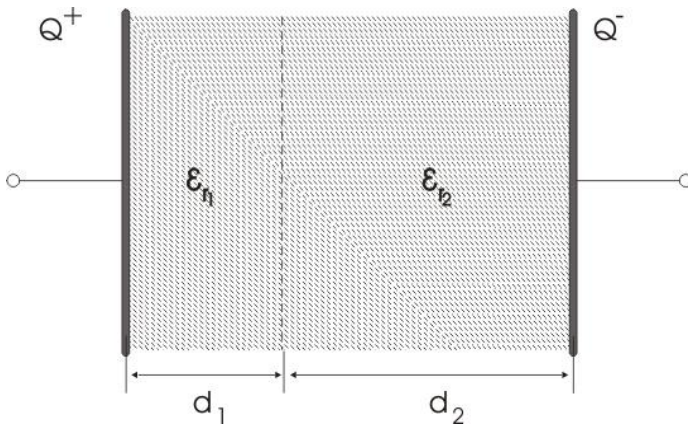
$$Q = C_e \cdot U = 12,3 \mu F \cdot 80V = 984 \mu C.$$

- 11) Pločasti kondenzator sadrži dva sloja dielektrika kao na slici. Izračunati najmanju vrijednost napona U pri kojem dolazi do proboja kondenzatora ako su probojne vrijednosti elektrostatičkog polja za svaki sloj dielektrika

$$E_{1_{prob}} = 10kV / m$$

$$E_{2_{prob}} = 20kV / m$$

$$\text{za } \varepsilon_{r1} = 5 \quad \text{i} \quad \varepsilon_{r2} = 2.$$

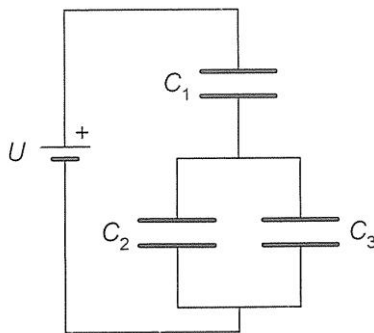


Sl. 20. Pločasti kondenzator sa 2 dielektrika

Rješenje: $U=116\text{ V}$

- 12) Na kondenzatorsku mrežu na slici priključen je izvor napajanja $U=1200\text{V}$. Izračunati ukupni kapacitet prikazane mreže, napone i količine naboja na svakom pojedinom kondenzatoru ako je zadano:

$$C_1 = 2\mu\text{F}, C_2 = 6\mu\text{F}, C_3 = 4\mu\text{F}.$$



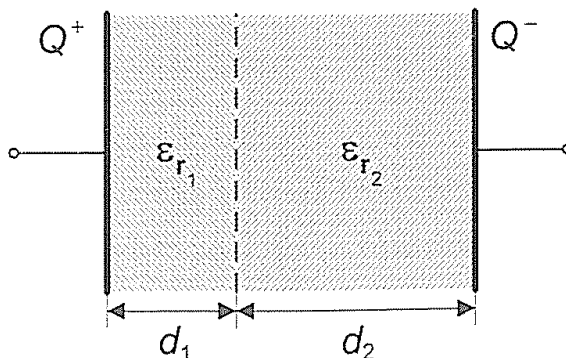
Sl. 21. Mješovita veza kondenzatora priključena na izvor napajanja

Rješenje:

$$C_{UK} = 2,67 \mu F, \quad U_1 = 800V, \quad U_2 = U_3 = 400V, \quad Q_1 = 3,2 \cdot 10^{-3} C,$$

$$Q_2 = 2,4 \cdot 10^{-3} C, \quad Q_3 = 0,8 \cdot 10^{-3} C,$$

- 13) Pločasti kondenzator sadrži dva sloja dielektrika kao na slici, napunjen je (opterećen) i odspojen od izvora. Izračunati napon na kondenzatoru jačinu električnog polja u svakom sloju te ukupni kapacitet kondenzatora ako je zadano:



Sl. 22. Pločasti kondenzator sa dva sloja dielektrika kao na slici, napunjen je (opterećen) i odspojen od izvora

$$\epsilon_{r1} = 2 \quad \text{i} \quad \epsilon_{r2} = 4, \quad d_1 = 3\text{cm}, \quad d_2 = 6\text{cm}, \quad S = 2\text{m}^2, \quad Q = 3,542 \cdot 10^{-8} C$$

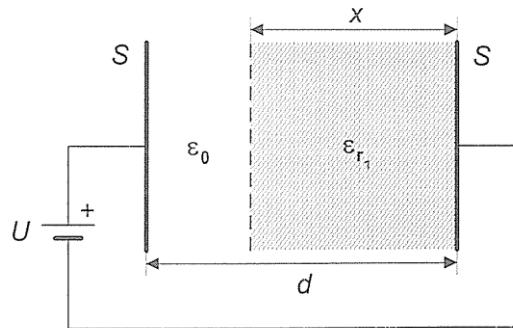
Rješenje:

$$C = 590,73 \text{pF}, \quad S = 59,96V$$

$$E_1 = 1\text{kV/m} \quad E_{2\text{prob}} = 0,5\text{kV/m}$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

- 14) Rastojanje između ploča kondenzatora je $d=2\text{mm}$. Između ploča na rastojanju $x=1,8\text{mm}$ ubačena je dielektrična pločica $\epsilon_x = 6$, tako da je dio između obloga $d-x=0,2\text{ mm}$ ispunjen vazduhom. Kondenzator je priključen na napon $U=1,5\text{kV}$. Izračunati napon na svakom djelu kondenzatora, odgovarajuće jačine polja u njima i ekvivalentnu kapacitivnost.



Sl. 23. Pločasti kondenzator sa dva sloja dielektrika (vazduh i dielektrična pločica)

Rješenje:

Ubacivanjem dielektrika dobijemo sistem od dva kondenzatora kapacitivnosti C_1 i C_2 vezani na red:

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d-x} \quad , \quad C_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{x} \dots\dots\dots 1.18$$

Kada se ubaci dielektrik, dolazi do uspostavljanja novog stacionarnog stanja i sada kondenzatori kapaciteta C_1 i C_2 imaju opterećenost Q_1 i Q_2 međusobno jednake, jer se radi o rednoj vezi kondenzatora. $Q_1 = Q_2$ odnosno $Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 = C_e U$

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d-x}$$

$$C_e = \frac{C_2 C_1}{C_2 + C_1} = \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{d-x} \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{x}}{\varepsilon_0 \frac{S}{d-x} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{x}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r S^2 \frac{1}{d-x} \cdot \frac{1}{x}}{\varepsilon_0 S \left(\frac{1}{d-x} + \varepsilon_r \frac{1}{x} \right)} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S \frac{1}{d-x} \cdot \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{d-x} + \varepsilon_r \frac{1}{x} \right)}$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon_r S \frac{1}{x + \varepsilon_r (d-x)}$$

$$U_2 = \frac{C_e}{C_2} \cdot U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S \frac{1}{x + \varepsilon_r (d-x)}}{\varepsilon_0 S \frac{1}{d-x}} \cdot U =$$

$$= \varepsilon_r \frac{d-x}{x + \varepsilon_r (d-x)} \cdot U = 6 \frac{0,2mm}{(1,8 + 6 \cdot 0,2)mm} \cdot 1,5kV = \frac{1,8}{3} = 0,6kV = 600V$$

Analognim proračunom možemo doći i do napona

$$U_1 = \frac{C_e}{C_1} U = 0,9kV = 900V$$

ili jednostavno iz relacije da je zbir napona na redno vezanim kondenzatorima jednak priključenom naponu, odakle je:

$$U_1 = U - U_2 = 1,5kV - 0,6kV = 0,9kV = 900V$$

Jačine električnog polja na ovim kondenzatorima su:

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = 0,9kV / 1,8mm = 0,5kV / mm = 0,5 \cdot 10^6 V / m$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = 0,6kV / 0,2mm = 0,3kV / mm = 0,3 \cdot 10^6 V / m$$

1.7 ENERGIJA U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

Električni rad se prilikom punjenja kondenzatora (opterećivanja) pretvara u elektrostatičku energiju. Ako je prije toga kondenzator bio neopterećen, tad izraz za električnu energiju možemo napisati u obliku:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \dots\dots\dots 1.19$$

Jedinica u SI sistemu za energiju je džul (J), ako je Q[C], C[F], U[V]. Ako se u nekom sistemu energija smanjuje, to znači da je polje vršilo rad i trošilo tu energiju.

Promjenu energije nazivamo smanjenje ili priraštaj energije i obilježavamo sa $\pm \Delta W$ ili $\pm dW$.

ZADACI:

15) Izračunati koliku energiju dobija elektron kada pređe, pod dejstvom sila polja, potencijalnu razliku 1V.

Rješenje:

$W = Q \cdot U = 1,6 \cdot 10^{-19} C \cdot 1V = 1,6 \cdot 10^{-19} [C \cdot V] = 1,6 \cdot 10^{-19} [J]$, ovo je često upotrebljavana jedinica za energiju u atomskoj fizici i elektronici i naziva se **elektronvolt**:

$$1[\text{CeV}] = 1,6 \cdot 10^{-19} [\text{J}]$$

16) Na pomjeranje elektriciteta od 0,2 C utrošena je energija od 300 J u homogenom električnom polju jačine $E=1,5 \text{ kV/m}$. Izračunati pređeno rastojanje.

Rješenje:

$$W = E \cdot l \cdot Q \Rightarrow l = \frac{W}{EQ} = \frac{300\text{J}}{1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 0,2\text{C}} = 1\text{m}.$$

17) Pločasti kondenzator površine $S = 2400\text{cm}^2$, rastojanja između ploča $d_1 = 5\text{mm}$, priključen je na napon $U_1 = 2\text{kV}$. Ako se zatim izvor napona isključi, a rastojanje između ploča dva puta poveća, utvrditi stanje u kondenzatoru, ako je dielektrik vazduh.

Rješenje:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot \frac{24 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 4,2 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

Pod dejstvom napona $U_1 = 2\text{kV}$, kondenzator će se napuniti količinom elektriciteta $Q_1 = C_1 U_1 = 4,2 \cdot 10^{-10} \text{ F} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V} = 8,4 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.

Jačina polja između ploča je:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ mV}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0,4 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

Energija je

$$W_1 = \frac{Q_1 U_1}{2} = \frac{8,4 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V}}{2} = 8,4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Ako rastojanje između ploča povećamo na $d_2 = 2d_1 = 10 \text{ mm}$, tada je nova vrijednost kapaciteta

$$\begin{aligned} C_2 &= \varepsilon_0 \frac{S}{d_2} = \varepsilon_0 \frac{S}{2d_1} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{d_1} = \frac{1}{2} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \cdot \frac{24 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2}{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4,2 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ F} \end{aligned}$$

Naelektrisanje (opterećenje) na pločama je ostalo nepromijenjeno.

Zbog promijenjene vrijednosti kapacitivnosti, promijenit će se napon na priključcima kondenzatora:

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{\frac{1}{2} \cdot C_1} = 2 \cdot \frac{Q_1}{C_1} = 2 \cdot \frac{8,4 \cdot 10^{-7} \text{ C}}{4,2 \cdot 10^{-10} \text{ F}} = 4 \cdot 10^3 \text{ V} = 4 \text{ kV}$$

Jačina polja ostala je ista, jer je:

$$E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{2U_1}{2d_1} = \frac{U_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 10^3 \text{ mV}}{5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 0,4 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

a energija je

$$W_2 = \frac{Q_2 U_2}{2} = \frac{Q_1 \cdot 2U_1}{2} = Q_1 \cdot U_1$$

$$W_2 = 8,4 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ V} = 2 \cdot 8,4 \cdot 10^{-4} \text{ J} = 16,8 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Vidimo da je $W_2 > W_1$ - energija je povećana na račun spoljašnje energije utrošene na razmicanje ploča.

18) Dimenzije pločastog kondenzatora su $a=12\text{cm}$, $b=10\text{cm}$, a rastojanje između ploča je $d=10\text{mm}$. Kondenzator je opterećen količinom elektriciteta

$$Q = 1,6 \cdot 10^{-6} [\text{C}]$$

Izračunati energiju kondenzatora:

a) kad je dielektrik vazduh,

b) kad je dielektrik materijal, čija je relativna dielektrična konstanta $\epsilon_r = 5$.

Rješenje:

a) $W=28,9 \text{ J}$, b) $W_1=5,78 \text{ J}$.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

2. OMOV ZAKON. SNAGA. DŽULLOVI TOPLOTNI GUBITCI

19) Sijalica sa volframovim vlaknom predviđena je za rad pri naponu $U=220V$ i snazi $P=40 W$. Kolika je otpornost vlakna i jačina struje pri sobnoj temperaturi ($20^{\circ}C$) i radnoj temperaturi od $2500^{\circ}C$. Koeficijent α za volfram je $0,004[1/^{\circ}C]$.

Rješenje:

Za proračun otpornosti koristimo izraz za snagu:

$$P = U \cdot I = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}, \text{ odakle je } R = \frac{U^2}{P} = \frac{(220V)^2}{40W} = 1210\Omega$$

Iz izraza za otpornost na bilo kojoj temperaturi $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$

nalazimo izraz za otpornost na sobnoj temperaturi R_0 :

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha(T - T_0)} = \frac{1210\Omega}{1 + 0,004[1/^{\circ}C](2500^{\circ}C - 20^{\circ}C)} = 118^{\circ}\Omega$$

Jačine struja :

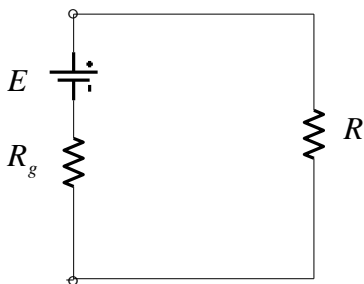
$$I = \frac{P}{U} = \frac{40}{220} = 0,18A$$

$$I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{220V}{118\Omega} = 1,86A$$

Vidi se da je struja I_0 na sobnoj temperaturi deset puta veća od struje I na radnoj temperaturi.

20) Nacrtati električno kolo sa generatorom, čija je Ems $E=100V$ i unutrašnji otpor $R_g = 1\Omega$ i na koji je priključen otpornik R . Izračunati :

- a) stepen korisnog dejstva generatora vezanog u kolo, ako je $R = 0$ i $R = 5k\Omega$
- b) Napon na krajevima generatora pri $R = 5k\Omega$.



Sl. 24. Električno kolo sa generatorom, ems $E=100V$ i unutrašnjim otporom $R_g = 1\Omega$ i na koji je priključen otpornik R

Rješenje:

Stepen(koeficijent) korisnog dejstva ili KKD(η) definisan je kao količnik korisne snage P_k , koja se razvija na otporniku R i snage P koju generator daje kolu, odnosno prijemniku (potrošaču):

$$\eta = \frac{P_k}{P} = \frac{R \cdot I^2}{E \cdot I} = \frac{R \cdot I}{E}$$

$$I = \frac{E}{R + R_g}$$

$$\eta = \frac{P_k}{P} = \frac{R \cdot I^2}{E \cdot I} = \frac{R \cdot I}{E} P_k = R \cdot I^2 = R \frac{E^2}{(R + R_g)^2} \quad \text{ili} \quad P_k = P - R_g \cdot I^2 ,$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

gdje je $R_g \cdot I^2$ dio snage generatora razvijen na unutrašnjoj otpornosti generatora.

$$P = E \cdot I = E \cdot \frac{E}{R + R_g} = \frac{E^2}{R + R_g} = I^2 (R + R_g),$$

$$\eta = \frac{P_k}{P} = \frac{R \cdot I^2}{I^2 (R + R_g)} = \frac{R}{R + R_g}$$

Za $R = 0$ je $\eta = 0$, odnosno $P_0 = \frac{E^2}{R_g}$

Tada je snaga generatora maksimalna, a za generator se kaže da je u *kratkom spoju*. Sva njegova snaga se uslijed Džulovog efekta pretvara u toplotu pa generator može biti oštećen i u takvom režimu ne smije da radi.

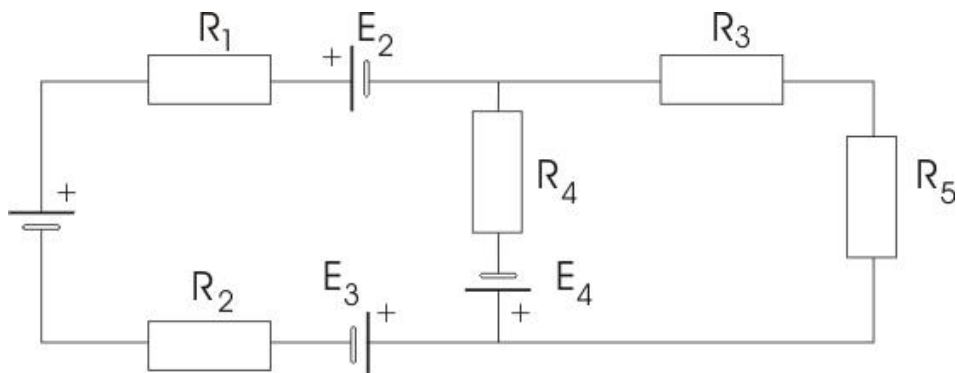
Za $R = 5k\Omega$ je $\eta = \frac{P_k}{P} = \frac{R}{R + R_g} = \frac{5000}{5000 + 1} = 99\%$.

b) $U = E - R_g \cdot I = E - R_g \cdot \frac{E}{R + R_g} = 100 - 1 \cdot \frac{100}{5 \cdot 10^3 + 1} = 99,9V$.

21) Izračunati vrijednost struje kroz otpornik $R_4 = 10\Omega$ i pad napona na njemu ako je poznato:

$$E_1 = 5V, \quad E_2 = 10V, \quad E_3 = 15V,$$

$$E_4 = 2V, R_1 = 20\Omega, R_2 = 20\Omega, R_3 = 15\Omega, R_5 = 30\Omega.$$



SI. 25. Proračun vrijednosti struje kroz otpornik $R_4 = 10\Omega$ i pad napona na njemu

Rješenje:

$$I_4 = 0,675A, \quad U_4 = 6,75V$$

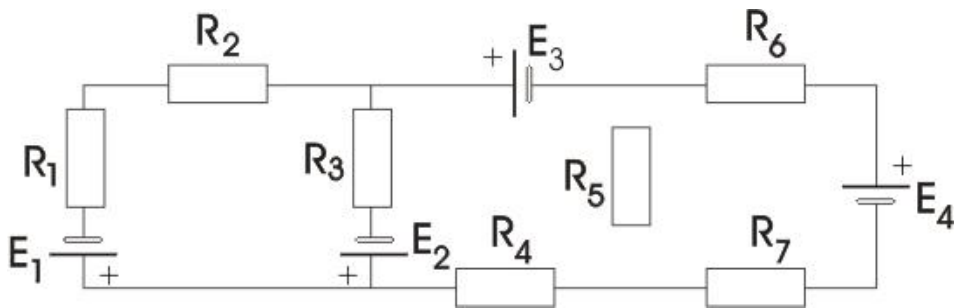
22) Izračunajte vrijednosti struja u svim granama mreže na slici ako je zadato:

$$E_1 = 50V, \quad E_2 = 40V, \quad E_3 = 20V,$$

$$E_4 = 25V, R_1 = 100\Omega, R_2 = R_7 = 250\Omega, R_3 = R_3 = 300\Omega,$$

$$R_4 = 150\Omega, R_5 = 100\Omega.$$

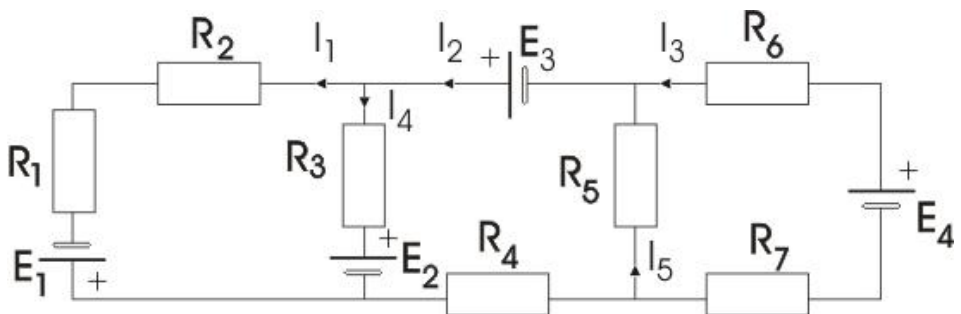
ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE



Rješenje:

$$I_1 = 3,27A , I_2 = 6,78A , I_3 = 1,08A , I_4 = 5,7A , I_5 = 3,51A .$$

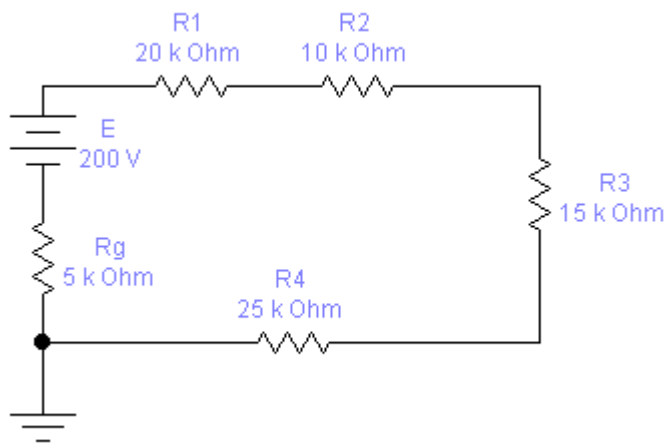
Smjerovi struja prikazani su na sljedećoj slici:



22) U električnom kolu na slici 26, vezana su četiri otpornika $R_1 = 20k\Omega$, $R_2 = 10k\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 25\Omega$, redno na izvor napajanja, čija je ems $E = 200V$ i unutarnja otpornost $R_g = 5k\Omega$. Nacrtati kolo i izračunati:

a) snagu izvora,

- b) korisnu snagu,
- c) koeficijent iskorišćenja (KKD),
- d) napon na krajevima generatora U_{AB}



SI. 26. Prikaz kola u EWB i proračun zadatih parametara

Rješenje:

Struja u kolu je

$$I = \frac{E}{R_{ekv.}} = \frac{E}{R_g + R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{200V}{(5 + 20 + 10 + 15 + 25) \cdot 10^3 \Omega} =$$

$$I = \frac{200V}{75 \cdot 10^3 \Omega} = 2,66mA$$

a) $P = E \cdot I = 200V \cdot 2,66 \cdot 10^{-3}W = 532 \cdot 10^{-3}W = 532mW$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

b) $P_k = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \cdot I^2$

$$P_k = (20 + 10 + 15 + 25) \cdot 10^3 \Omega \cdot (2,66 \cdot 10^{-3} A)^2 = \\ = 70 \cdot 10^3 \Omega \cdot 7,0756 \cdot 10^{-6} = 595,29 mW$$

c) KKD $\eta = \frac{P_k}{P} = \frac{495,2 mW}{532 mW} = 0,93$

ili u procentima : $\eta = \frac{P_k}{P} \cdot 100\% = \frac{495,2 mW}{532 mW} \cdot 100\% = 93\%$

d)

$$U_{AB} = E - R_g I = 200V - 5 \cdot 10^3 \Omega \cdot 2,66 \cdot 10^{-3} A = 200V - 13,3V = 186,2V$$

ili $U_{AB} = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \cdot I = 186,2V$.

3. PRVI I DRUGI KIRHOFOV ZAKON

Prvi Kirhofov zakon glasi: algebarski zbir struja za svaki čvor jednak je nuli $\sum I = 0$, pri čemu sve struje koje su usmjerene od čvora ulaze u algebarsku sumu sa pozitivnim predznakom, a struje usmjerene ka čvoru, sa negativnim predznakom.

Drugi Kirhofov zakon glasi: algebarski zbir svih napona duž svake zatvorene konture kola jednak je nuli:

$$\sum (E - RI) = 0 \dots\dots\dots 3.1$$

Članovi sume RI su naponi na otpornicima i ulaze sa pozitivnim predznakom u algebarski zbir, ako je referentni smjer struje suprotan od

pozitivnog smjera obilaska zatvorenog puta, a sa znakom minus, kada se smjer struje i orijentacija konture poklapaju.

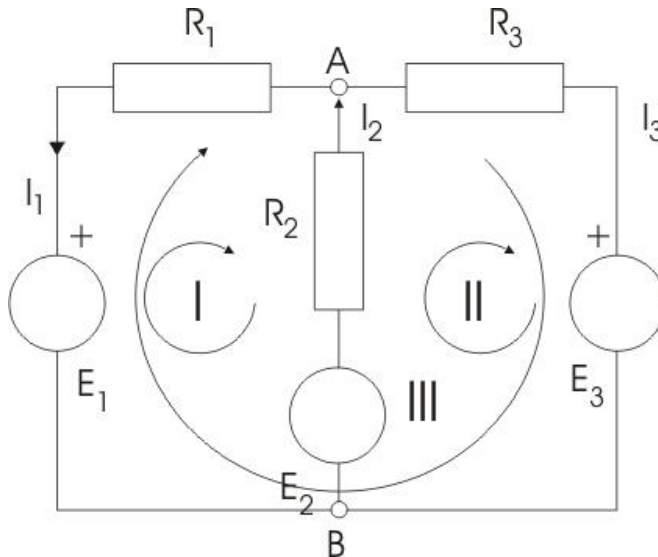
Dakle, kod proračuna električnog kola, osnovni princip je:

- a) Usvojimo pozitivne smjerove struja u granama(kontura),
- b) Odredimo broj čvorova (n_c). Prema prvom KZ pišemo $n_c - 1$ jednačinu tipa $\sum I = 0$ za čvorove.
- c) Izaberemo n_k nezavisnih kontura, koje obilježimo sa I, II, III, ... i usvojimo njihove **pozitivne** smjerove. Broj kontura određujemo prema relaciji
$$n_k = n_g - (n_c - 1)$$
- d) Napišemo $n_k = n_g - (n_c - 1)$ nezavisnih jednačina po drugom Kirhofovom zakonu tipa $\sum E = 0$. Dakle, koliko ima nezavisnih kontura n_k , toliko jednačina napišemo po II KZ.
- e) Na kraju riješimo taj sistem jednačina.

Broj nezavisnih jednačina treba biti jednak broju kontura u kolu.

Prilikom odabiranja kontura treba voditi računa da svaka sadrži makar jednu granu koja ne pripada drugim konturama.

ZADACI:



Sl. 27. Primjena I i II Kirhofovog zakona

23) Za kolo na Sl. 27 npr. neka su date vrijednosti: $E_1 = 6V$, $E_2 = 12V$,
 $E_3 = 9V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 4\Omega$.

- a. vidimo da je broj čvorova $n_{\check{c}} = 2$, pa prema I KZ pišemo
 $n_{\check{c}} - 1 = 2 - 1 = 1$ jednačinu za čvor koji odaberemo. Sl. 26.

Npr. uzmimo čvor A, za koji po I KZ pišemo jednačinu :

Čvor A: $I_3 - I_1 - I_2 = 0$ 3.2

Ista jednačina bi se dobila i za čvor B, zbog čega je jasno zašto pišemo
 $n_{\check{c}} - 1$ jednačina.

Od tri konture samo su dvije nezavisne, pa su proizvoljno izabrane i orjentisane konture I i II, za koje pišemo jednačine po II KZ:

$$I) E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 0 \dots\dots\dots 3.3$$

$$II) E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + -E_2 = 0 \dots\dots\dots 3.4$$

Ako saberemo ove dvije jednačine dobili bi jednačinu za konturu III, zbog čega je jasno zašto nije nezavisna.

Npr. neka su na ovoj šemi:

$$E_1 = 6V, E_2 = 12V, E_3 = 9V, R_1 = 1\Omega, R_2 = 3\Omega, R_3 = 4\Omega$$

Ako ove vrijednosti uvrstimo u jednačine 3.2 i 3.3 dobijemo

$$-I_1 + 3I_2 - 6 = 0 \text{ i}$$

$$-3I_2 + 4I_3 + 21 = 0$$

Iz () dobijemo $I_3 = I_1 + I_2$. Ako ovu jednačinu uvrstimo u drugu jednačinu sistema (3.2), dobijemo sledeći sistem od dvije jednačine:

$$-I_1 + 3I_2 - 6 = 0$$

$$-3I_2 + 4(I_1 + I_2) + 21 = 0 \Rightarrow 4I_1 - 7I_2 + 21 = 0 \dots\dots\dots 3.5$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -4 i dobijenu jednačinu saberemo sa drugom, dobije se:

$$-19I_2 + 45 = 0,$$

odakle je

$$I_2 = \frac{45}{19} = 2,37A$$

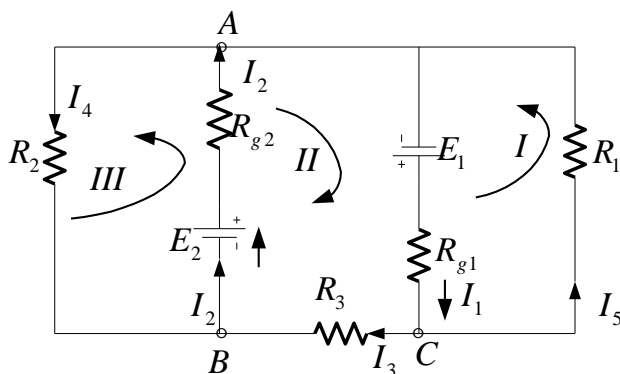
Ako ovo rješenje uvrstimo u drugu jednačinu sistema (3.4), dobije se:

$$-I_1 + 1,11 = 0, \text{ odakle je } I_1 = 1,11A$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Ako dobivene vrijednosti za I_1 i I_2 uvrstimo u prvu jednačinu, dobijemo $I_3 = 3,48A$.

23) Izračunati struje u svim granama kola na slici primjenom Kirhofovih zakona, ako je poznato:



Sl. 27. Proračun struja u kolu primjenom Kirhofovih zakona

$$R_1 = 1\Omega, R_2 = 2\Omega, R_3 = 3\Omega,$$

$$E_1 = E_2 = 30V \text{ i unutarnja otpornost}$$

$$R_{g1} = R_{g2} = 1\Omega.$$

Rješenje:

Postupak rješavanja primjenom Kirhofovih zakona:

a) Usvojimo pozitivne smjerove u granama, odnosno konturama

b) Za $n_c = 3$ pišemo $n_c - 1 = 3 - 1 = 2$ jednačinu po I KZ

Za čvor C: $I_1 = I_5 + I_3$ 3.6

Za čvor B: $I_2 = I_4 + I_3$ 3.7

a) Izaberemo $n_k = n_g - (n_c - 1) = 5 - 2 = 3$ nezavisne konture,
 obilježimo ih sa I, II i III i usvojimo njihove +(pozitivne) smjerove.

b) Pišemo $n_k = n_g - (n_c - 1) = 3$ jednačine po II Kirhofovom zakonu:

I kontura: $E_1 - R_{g1}I_1 - R_1I_5 = 0$ 3.8

II kontura: $E_1 - R_{g1}I_1 - R_3I_3 - R_{g2}I_2 + E_2 = 0$ 3.9

III kontura: $E_2 - R_2I_4 + R_{g2}I_2 = 0$ 3.10

Iz jednačina (3.8), (3.9) i (3.10) eliminišemo I_1 i I_2 koristeći jednačine (3.6) i (3.7):

$$E_1 - R_{g1}I_5 - R_{g1}I_3 - R_1I_5 = 0$$

$$E_1 + E_2 - R_{g1}I_5 - R_{g1}I_3 - R_3I_3 - R_{g2}I_4 - R_{g2}I_3 = 0$$

$$E_2 - R_2I_4 - R_{g2}I_4 - R_{g2}I_3 = 0$$

$$E_1 - R_{g1}(I_5 + I_3) - R_1I_5 = 0$$

$$E_1 + E_2 - R_{g1}I_5 - R_{g1}I_3 - R_3I_3 - R_{g2}I_4 - R_{g2}I_3 = 0$$

$$E_2 - R_2I_4 + R_{g2}I_4 - R_{g2}I_3 = 0$$

Ako na osnovu podataka imamo u vidu da je $R_{g1} = R_1 = 1\Omega$ i nakon sređivanja, dobijemo:

$$E_1 - (R_1 + R_1)I_5 - R_1I_3 = 0$$

$$E_1 + E_2 - R_1I_5 - R_1I_3 - R_3I_3 - R_{g2}I_4 - R_{g2}I_3 = 0$$

$$E_2 - R_2I_4 + R_{g2}I_4 - R_{g2}I_3 = 0$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$E_1 - (R_1 + R_1)I_5 - R_1 I_3 = 0$$

$$E_1 + E_2 - R_1 I_5 - R_{g2} I_4 - (R_1 + R_3 + R_{g2}) I_3 = 0$$

$$E_2 - (R_2 + R_{g2}) I_4 - R_{g2} I_3 = 0$$

$$(1+1)I_5 - 1 \cdot I_3 = 30V$$

$$1 \cdot I_5 + 1 \cdot I_4 + (1+3+1)I_3 = 30 + 30$$

$$(2+1)I_4 + 1I_3 = 30$$

$$2I_5 - I_3 = 30V \dots\dots\dots 3.11$$

$$I_5 + I_4 + 5I_3 = 60$$

$$3I_4 + I_3 = 30 \dots\dots\dots 3.12$$

$$\text{Iz (3.12)} \quad I_4 = \frac{30}{3} - \frac{I_3}{3} = 10 - \frac{I_3}{3}$$

$$\text{Iz (3.11)} \quad I_5 = \frac{30}{2} - \frac{I_3}{2} = 15 - \frac{I_3}{2}$$

Ako izraze za I_4 i I_5 uvrstimo u jednačinu (23.4), dobijemo:

$$15 - \frac{I_3}{2} + 10 - \frac{I_3}{3} + 5I_3 = 60 \cdot | \cdot 6 \Rightarrow$$

$$80 - 3I_3 + 60 - 2I_3 + 30I_3 = 360 \Rightarrow 25I_3 = 220$$

$$I_3 = \frac{220}{25} = 8,8A$$

Dalje imamo:

$$I_4 = 10 - \frac{I_3}{3} = 10 - \frac{8,8}{3} = 10 - 2,93 = 7,06A$$

$$I_5 = 15 - \frac{I_3}{2} = 15 - \frac{8,8}{2} = 15 - 4,4 = 10,6A$$

$$I_1 = I_5 + I_3 = 10,6A + 8,8A = 19,4A$$

$$I_2 = I_4 + I_3 = 7,06A + 8,8A = 15,86A$$

4. MAGNETIZAM

Magnetni fluks Φ može se izraziti kao skalarni proizvod dva vektora \vec{B} i \vec{S} kao:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}, \text{ tj., } \Phi = B \cdot S \cdot \cos \theta \dots\dots\dots 4.1$$

Gdje je θ ugao između vektora \vec{B} i \vec{S} , odnosno normale \vec{N} posmatranu površinu S .

Jedinica za fluks:

$$[\Phi] = [B] \cdot [S] = T \cdot m^2 = Wb \text{ (veber)}.$$

Ako posmatramo fluks ne kroz jedan zavojak, tj. jednu površinu, nego kroz N navojaka, tad je fluks vektora magnetne indukcije \vec{B} , N puta veći:

$$\Phi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot (B \cdot S \cdot \cos \theta)$$

Za $\theta = 0^\circ$, tad je $\Phi = N \cdot B \cdot S = N \cdot (B \cdot S)$.

Elektromagnetna indukcija pri kojoj se pri promjeni magnetskog toka $\Delta\Phi$ u određenom vremenu Δt indukuje ems ili napon:

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

odakle možemo definisati jedinicu za fluks, odnosno tok magnetnog polja:

$$[\Phi] = [e] \cdot [t] = V \cdot s = \text{voltsekunda} \dots\dots\dots 4.2$$

Ova jedinica se u čast fizičara Vebera označava sa Wb .

$$1Wb = V \cdot s$$

Jedinica za gustinu magnetskog toka B određuje se prema poznatim jedinicama veličina koje ulaze u jednačinu

$$T = \frac{Wb}{m^2} \quad \text{ili} \quad T = \frac{V \cdot s}{m^2}$$

Magnetno kolo može ostvariti visoke vrijednosti fluksa i indukcije. Idealan primjer magnetnog kola je torus sa jezgrom od feromagnetika.

$$H = \frac{NI}{2\pi r} = \frac{NI}{l} \dots\dots\dots 4.3$$

$$B = \mu H$$

(6.3)

Ako je S površina poprečnog presjeka jezgra, tada je fluks vektora \vec{B} u jezgru torusa:

$$\Phi = BS = \mu \cdot \frac{NI}{l} \cdot S = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S}} = \frac{F_M}{R_M} \dots\dots\dots 4.4$$

magnetna ili magnetomotorna sila ili magnetopobudna sila:

$$F_M = NI \quad 4.5$$

$\Theta = NI$ -ovaj proizvod naziva broj **amper –zavoja** (AZ), mjeri se jedinicom amper, jer je broj zavoja N bezdimenzionalan broj.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Magnetski tok Φ možemo pisati i u obliku $\Phi = BS = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S}} = \frac{\Theta}{R_M}$

Podsjeća na **Omov zakon** za jačinu električne struje u strujnom kolu:

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_M} \Rightarrow I = \frac{E}{R} \equiv \frac{EMS}{R} \dots\dots\dots 4.5$$

ZADACI:

24) Magnetna indukcija u kalemu od $N=100$ navojaka sa $0,2T$ povećá se na $0,4T$. Kolika je promjena fluksa ako je površina navojka $S=12 \text{ cm}^2$.

Rješenje:

Uzmimo da je $\theta=0$, tj. da su silnice \vec{B} okomite na površinu S , pa je :

$$\Phi = N \cdot B \cdot S = N \cdot (B \cdot S) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Phi &= B_1 \cdot N \cdot S = 0,2T \cdot 100 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 20 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \text{ Tm}^2 = \\ &= 240 \cdot 10^{-4} \text{ Tm}^2 = 240 \cdot 10^{-4} [\text{Wb}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= B_2 \cdot N \cdot S = 0,4T \cdot 100 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 40 \cdot 12 \cdot 10^{-4} \text{ Tm}^2 = \\ &= 480 \cdot 10^{-4} \text{ Tm}^2 = 480 \cdot 10^{-4} [\text{Wb}] \end{aligned}$$

Dakle, fluks se promjenio za :

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 480 \cdot 10^{-4} [\text{Wb}] - 240 \cdot 10^{-4} [\text{Wb}] = 240 \cdot 10^{-4} [\text{Wb}].$$

25) Na tanak torus namotano je $N=800$ namotaja tanke žice. Presjek torusa je $S = 1\text{cm}^2$, a struja kroz namotaj torusa je $I=1\text{mA}$. Izračunati magnetsku indukciju u torusu i fluks kroz torusni namotaj. Torus je načinjen od neferomagnetnog materijala.

$$(\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \text{ ili } \frac{H}{m})$$

Rješenje:

Ako su namotaji gusto i ravnomjerno namotani na torusno jezgro, magnetno polje je lokalizovano samo unutar torusa. Kada je torus tanak (malog poprečnog presjeka S), može se smatrati da je polje u poprečnom presjeku torusa homogeno, pa direktna primjena Amperovog zakona daje:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \Rightarrow B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \cdot N \equiv \mu_0 \frac{I}{l_{sr}} \cdot N$$

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \cdot N \equiv \mu_0 \frac{I}{l_{sr}} \cdot N = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \cdot \frac{0,1A}{2\pi \cdot 0,1m} \cdot 800 \text{ namotaja} = \\ &= 2 \cdot 800 \cdot 10^{-7} \frac{N}{mA} = 1600 \cdot 10^{-7} \frac{N}{mA} = \\ &= 1600 \cdot 10^{-7} T = 0,16 \cdot 10^{-3} T = 0,16 \cdot mT \end{aligned}$$

S obzirom da je polje homogeno, fluks kroz poprečni presjek torusa je:

$$\Phi_0 = B \cdot S = 0,16 \cdot 10^{-3} T \cdot 10^{-4} m^2 = 0,16 \cdot 10^{-7} T \cdot m^2 = 16 \mu Wb$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Ukupni fluks kroz torusni namotaj sa N navojaka je:

$$\Phi = N \cdot \Phi_0 = N \cdot B \cdot S = 800 \cdot 0,16 \cdot 10^{-3} T \cdot 10^{-4} m^2 = 12800 \mu Wb = 12,8 mWb$$

.

26) Kolika je sila uzajamnog dejstva dva pravolinijska strujna provodnika dužine $l=5,5m$, a koji su paralelni i na međusobnom rastojanju $a=4cm$?

Kroz jedan provodnik protiče struja $I_1=6,2A$, a kroz drugi $I_2=8A$.

Rješenje:

$$F = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a} \cdot l$$

Poznato je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$

$$\begin{aligned} F &= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a} \cdot l = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \cdot \frac{6,2A \cdot 8A}{2\pi \cdot 0,04m} \cdot 5,5m = 2 \cdot \frac{6,2 \cdot 8}{0,04} \cdot 5,5 \cdot 10^{-7} N = \\ &= 2 \cdot \frac{272,8}{0,04} \cdot 10^{-7} N = 2 \cdot 6820 \cdot 10^{-7} N = 13640 \cdot 10^{-7} N = 1,364 \cdot 10^{-3} N \end{aligned}$$

.

5. NAIZMENIČNA STRUJA. ELEKTRIČNA KOLA

5.1. KOMPLEKSNI BROJEVI

Naizmjenične struje i napone prikazujemo u kompleksnom obliku primjenom kompleksnih brojeva.

Kompleksni broj možemo predstaviti na sledeća tri načina: algebarskom, trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku.

$\underline{A} = a + jb$ -algebarski oblik kompleksnog broja

$\underline{A} = A \cos \alpha + j A \sin \alpha$ -trigonometrijski oblik kompleksnog broja

$\underline{A} = A \cdot e^{j\alpha} = a \cdot \exp(j\alpha) = A \angle \alpha$ -eksponencijalni oblik kompleksnog broja

U ovim izrazima A je modul kompleksnog broja:

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Modul kompleksnog broja jednak je dužini vektora kojeg predstavlja kompleksni broj.

$\alpha = \operatorname{arctg} a \frac{b}{a}$ -argument kompleksnog broja, tj. ugao između realne ose i vektora koji predstavlja kompleksni broj, napon ili struju u kompleksnom obliku.

$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$ -Ojlerova formula.

$A^* = a - jb$ -konjugirano kompleksni broj.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$A^* = A \cos \alpha - jA \sin \alpha$$

$$A^* = A \cdot e^{-j\alpha} = a \cdot \exp(-j\alpha) = A \angle -\alpha$$

OSNOVNE OPERACIJE SA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

Posmatrajmo dva kompleksna broja :

$$\bar{X} = a + jb \quad \text{i} \quad \bar{Y} = c + jd \dots\dots\dots 5.1$$

$$\bar{X} + \bar{Y} = a + jb + c + jd = (a + c) + j(b + d) \text{ -sabiranje}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} = a + jb - (c + jd) = (a - c) + j(b - d) \text{ -oduzimanje}$$

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = (a + jb) \cdot (c + jd) = (ac - bd) + j(ad - bc) \text{ -množenje}$$

$$\bar{X} : \bar{Y} = (a + jb) : (c + jd) = \frac{X \angle \alpha^0}{Y \angle \beta^0} = \frac{X}{Y} \angle \alpha^0 + \beta^0 \text{ -dijeljenje}$$

Kod dijeljenja dva broja u algebarskom obliku, treba brojnik i nazivnik pomnožiti sa konjugirano- kompleksnim brojem i dalje izvršimo množenje i sređivanje izraza, nakon čega se dobije kompleksni broj.

Dijeljenje je jednostavnije sprovesti u eksponencijalnom obliku:

$$\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{X \angle \alpha^0}{Y \angle \beta^0} = \frac{X}{Y} \angle (\alpha^0 - \beta^0) = A \cdot e^{j(\alpha - \beta)} = A \cdot \exp[j(\alpha - \beta)] = A \angle (\alpha^0 - \beta^0)$$

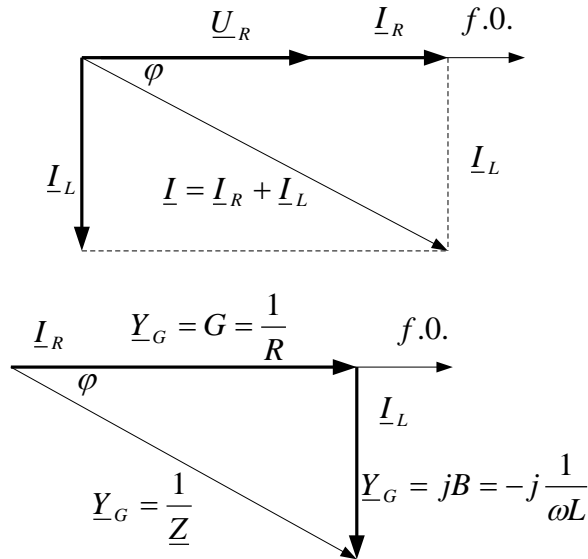
$$X \cdot X^* = X^2 (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = X^2$$

$$\vec{E} = \bar{E} = \underline{E}_m \cdot e^{j\alpha} \text{ -obrtni vektor (fazor)}$$

Paralelno R-L kolo:

$\underline{Z} = (R + jX)\Omega$. -kompleksna impedansa5.2

$\underline{Y} = G + jB$, -kompleksna admitansa5.3



Sl. 28. Fazorski prikaz odnosa napona i struja u paralelnom R-L kolu,

trougao otpora, trougao provodnosti.

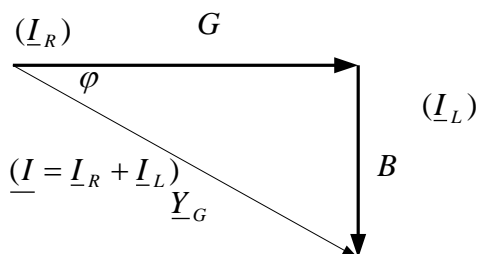
$G = \frac{1}{R} [S]$ -aktivna provodnost,

$B = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{X_L} [S]$ -reaktivna provodnost.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Kompleksna admitansa uz vrijednosti provodnosti je:

$$\underline{Y} = G + jB = (0,1 - j0,05)S.$$



Sl. 29. Uz definiciju i proračun faznog pomaka (ili ugla) između napona i ukupne struje

Fazni pomak (ili ugao) između napona i ukupne struje φ dobijemo iz trougla otpora/impedansi/ admitanse:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1/\omega L}{1/R} = \frac{R}{\omega L} = \frac{B}{G} = \frac{10\Omega}{20\Omega} = (ili) = \frac{0,05S}{0,1S} = 0,5 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0,5$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0,5 = 26,5^\circ.$$

Modul impedanse

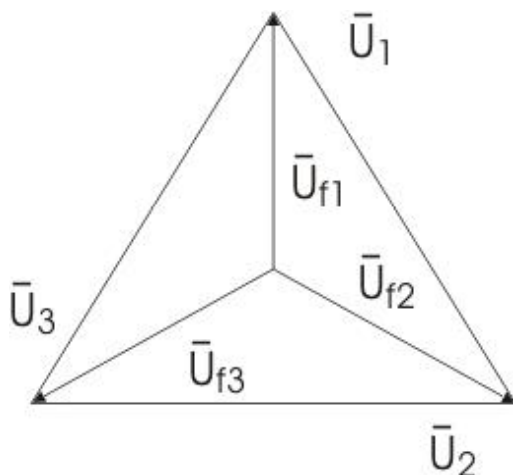
$$\underline{Z} = R + jX_L \Rightarrow |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X_L^2}. \text{ Modul impedanse}$$

6. TROFAZNA NAIZMENIČNA STRUJA

Ako između dva vektora ili dva kompleksna broja nije ugao 90 stepeni, nego manji, tad se primjenjuje kosinusni poučak (teorema) za proračun rezultante dva napona ili struje date u trigonometrijskom obliku:

$$I_{mR}^2 = I_{m1}^2 + I_{m2}^2 - 2 \cdot I_{m1} \cdot I_{m2} \cdot \cos \alpha_R$$

Veze između napona i struja u spoju namotaja generatora u zvijezdu (analogno se provodi analiza i za spoj namotaja u trougao):



SI. 30. SI.7.2. Fazorski prikaz linijskih i faznih napona

Između svakog faznog i nultog voda je prosti ili fazni napon: U_{f1}, U_{f3} i U_{f3} . Između dva fazna voda su linijski ili složeni naponi U_1, U_2 i

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

U_3 koji su jednaki fazorskoj razlici dva fazna napona, što se dobija primjenom II Kirhofovog zakona (Sl.8.10.-Knjiga)

$$U_{f1} - U_1 - U_{f2} = 0 \quad \text{i} \quad U_1 = U_{f1} - U_{f2}$$

$$U_{f2} - U_2 - U_{f3} = 0 \quad \text{i} \quad U_2 = U_{f2} - U_{f3} \dots\dots\dots 6.1$$

$$U_{f3} - U_3 - U_{f1} = 0 \quad \text{i} \quad U_3 = U_{f3} - U_{f1}$$

Sasvim je jasno da između faznog i linijskog napona kod veze u zvijezdu postoji isti odnos kao između fazne i linijske struje pri vezi u trougao: $I = \sqrt{3} \cdot I_f$.

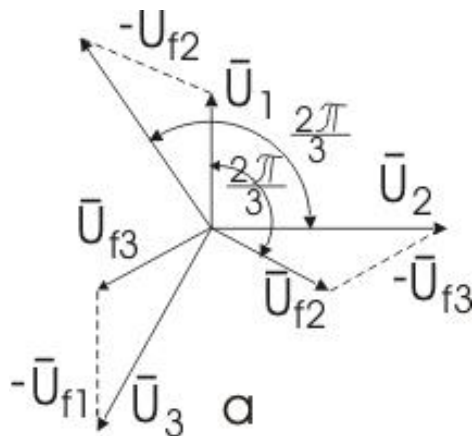
U spoju trougla linijski naponi jednaki su faznim: $U_{lin} = U_{fazni}$, a linijska struja je za $\sqrt{3}$ puta veća od fazne, tj.: $I_{lin} = \sqrt{3} I_{fazna}$.

Kod spoja u zvijezdu je obrnuto: $U_{lin} = \sqrt{3} U_{fazni} \quad I_{lin} = I_{fazna}$.

Veza u zvijezdu je u prednosti pred vezom u trougao, jer sadrži dva napona: fazni i linijski napon, tj. napone za jednofazne i trofazne prijemnike.

Kod spoja u zvijezdu je : $U_{lin} = \sqrt{3} U_{fazni} \quad I_{lin} = I_{fazna}$. (vidi sliku 44). Posmatrajući bilo koji trougao napona na ovoj slici, iz koga dobijemo:

$$\cos 30^\circ = (U_1/2)/U_{f1} = \frac{U_1}{2 \cdot U_{f1}}$$



Sl.31. Fazorski dijagram linijskih i faznih napona i njihovih odnosa

ZADACI

27) Izračunati aritmetičku srednju vrijednost, efektivnu vrijednost te tjemeni faktor napona sinusnog oblika definisan izrazom:

$$u(\omega t) = U_m \sin \omega t = 20V \cdot \sin \omega t$$

Rješenje:

Za vježbu nacrtati dati sinusni napon i potvrditi podudarnost grafičkog i analitičkog prikaza napona.

Sa dijagrama vidimo da napon oblika: $u(\omega t) = U_m \sin \omega t = 20V \cdot \sin \omega t$ ima srednju vrijednost jednaku nula, što se zaključuje i bez proračuna.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Dakle, $U_{SR} = 0[V]$ - to zaključujemo bez proračuna, jer se posmatra cijeli period u kome je srednja vrijednost sinusoide jednaka nuli, što smo izveli na predavanjima.

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \dots = 14,14[V]$$

$$U_{ef} = 14,14[V], \quad \text{-efektivna vrednost}$$

$$\sigma = \frac{U_{\max}}{U_{ef}} = \frac{I_{\max}}{I_{ef}} = \frac{I_{\max}}{I_{\max} / \sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,41 \quad \text{-temena vrednost}$$

28) Trenutna vrijednost naizmjenične struje koja teče u jednom kolu iznosi 12A. Izračunati maksimalnu vrijednost struje ako vremenski ugao $\alpha = \omega t$ iznosi $\alpha = \omega t = 30^\circ$.

Rješenje:

$$i(\omega t) = I_m \sin(\omega t + \theta) \Rightarrow 12A = I_m \cdot \sin 30^\circ = I_m \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 12A = I_m \cdot \frac{1}{2}, \Rightarrow I_m = 24A$$

.

29) Odredi trenutak kada je trenutna vrijednost naizmjenične struje $\sqrt{2}$ puta manja od maksimalne vrijednosti I_m , ako je

$$i(\omega t) = I_m \sin(\omega t + \theta) = I_m \sin 314t.$$

Rješenje:

Iz relacije

$$i(\omega t) = I_m \sin(\omega t + \theta) = I_m \sin 314t \Rightarrow \text{sledi} \Rightarrow \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I_m \sin 314t \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 314t$$

Odnosno $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 314t$ odakle je

$$314t = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ \Rightarrow t = \frac{45}{314} = 0,1433$$

Iz odnosa

$$314t = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{2}{T}t = \frac{1}{4}, \quad \Rightarrow \frac{t}{T} = \frac{1}{8} \Rightarrow t = \frac{1}{8} \cdot T$$

$$\text{Iz } \frac{2\pi}{T} = 314 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{314} = \frac{2 \cdot 3,14}{314} = \frac{2 \cdot 314 \cdot 10^{-2}}{314} = 2 \cdot 10^{-2} = 0,02s$$

Na osnovu čega dobijemo traženo vrijeme(trenutak):

$$t = \frac{1}{8} \cdot T = \frac{1}{8} \cdot 0,02s = 0,0025s .$$

30) Izračunati trenutnu vrijednost struje u trenutku $t=0,025s$, ako je

$$i(\omega t) = I_m \sin 314t = 10\sqrt{2} \sin 314t .$$

Rješenje:

$$i(\omega t) = I_m \sin 314t = 10\sqrt{2} \sin 314t = 10\sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{0,02} \cdot 0,025$$

$$i(\omega t) = I_m \sin 314t = 10\sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{0,02} \cdot 0,025 =$$

$$= 10\sqrt{2} \sin \pi \frac{0,025}{0,01} = 10\sqrt{2} \sin \pi \cdot 2,5 =$$

$$= 10\sqrt{2} \sin \pi \cdot (2 + \frac{1}{2}) = 10\sqrt{2} \sin \pi \cdot (2 + \frac{1}{2}) =$$

$$= 10\sqrt{2} \sin(2\pi + \frac{1}{2}\pi) = 10\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} = 10\sqrt{2} \cdot 1 = 10\sqrt{2}$$

$$i = 10\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} = 10\sqrt{2} \cdot 1 = 10\sqrt{2} = 10 \cdot 1,41 = 14,1A . \quad \text{--trenutna vrednost}$$

struje u trenutku $t=0,025s$.

31) Naizmjenična struja data je analitičkim izrazom

$$i(\omega t) = I_m \sin(\omega t + \theta) = 18 \sin(\omega t + 3\pi / 2) .$$

Prikazati ovaj izraz vektorski, linijski i kompleksno.

Rješenje:

$$i(\omega t) = I_m \sin(\omega t + \theta) = 18 \sin(\omega t + 3\pi / 2)$$

$$I_{ef} = \frac{18}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} = \frac{18}{\sqrt{2}} \cdot (\cos \frac{3\pi}{2} - j \sin \frac{3\pi}{2}) = \frac{18}{\sqrt{2}} \cdot [0 - j(-1)] =$$

$$= \frac{18}{\sqrt{2}} \cdot [0 + j] = j \frac{18}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$I_{ef} = j \frac{18}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_m = \sqrt{2} \cdot I_{ef} = \sqrt{2} \cdot j \frac{18}{\sqrt{2}} = j18A$$

$$I_m = j18A.$$

Sinusoida prethodi za ugao $3\pi/2$ u odnosu na sinusoidu bez faznog pomaka.

32) Prostoperiodični napon efektivne vrijednosti $U_{ef} = U = 200\sqrt{2}[V]$ i frekvencije $f=50\text{Hz}$ ima u trenutku $t_1 = 10[ms]$ od početnog trenutka intenzitet $U_1 = -200[V]$ i smanjuje se po intenzitetu. Napisati izraz za intenzitet ovog napona i nacrtati grafiku intenziteta napona (u).

Rješenje:

Iz jednačine $u(\omega t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$,

$u(\omega t) = U_m \sin(\omega t + \theta)$ možemo u nekom trenutku $t = t_1$ izračunati

fazu napona na osnovu sledeće jednačine:

$$u = U_m \cos(\omega t + \theta) \Rightarrow u_1 = U_m \cos(\omega t_1 + \theta) \Rightarrow$$

$$\cos(\omega t_1 + \theta) = \frac{u_1}{U_m} \quad \text{odakle je :}$$

$$\alpha = \omega t_1 + \theta = \arccos \frac{u_1}{U_m}$$

(1)

U našem primjeru je $U_{ef} = U = 200\sqrt{2}[V]$, na osnovu čega je amplituda napona:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$U_m = \sqrt{2}U_{ef} = \sqrt{2} \cdot 200\sqrt{2} = 400[V],$$

Kružna frekvencija je:

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 50\text{Hz} = 100 \cdot \pi [\text{Hz}] = 100 \cdot 3,14 [\text{Hz}] = 314 \cdot [\text{Hz}]$$

Faza napona u trenutku $t = t_1$:

$$\alpha = \omega t_1 + \theta = \arccos \frac{u_1}{U_m} = \arccos \frac{-200V}{400V} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

odakle dobijemo dva rješenja:

$$\omega t_1 + \theta = \frac{2\pi}{3} \qquad \omega t_1 + \theta = \frac{4\pi}{3}$$

U zadatku je definisano da se u trenutku $t = t_1$ napon smanjuje po intenzitetu, faza napona u $t = t_1$ je:

$$\omega t_1 + \theta = \frac{2\pi}{3}$$

pa je prema tome, početna faza napona:

$$\theta = \frac{2\pi}{3} - \omega t_1 = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$$

Sada na osnovu prethodno izračunatih vrijednosti, možemo napisati izraz za trenutnu vrijednost napona:

$$u = U_m \sin(\omega t + \theta) = 400\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)[V] \equiv 400\cos\left(314t - \frac{\pi}{3}\right)[V]$$

Na osnovu ovog izraza, za vježbu, nacrtati trigonometrijsku funkciju ovog napona.

33) Dati su izrazi za struje:

$$i_1 = 5 \sin(\omega t + \pi/4) \quad i_2 = 5 \cos(\omega t + \pi/4)$$

Izračunati amplitudu i fazni pomjeraj, izvesti trigonometrijski oblik zbira ove dvije struje i nacrtati vektorski dijagram ovih i rezultantne struje.

Rješenje:

Trigonometrijsko-analitičkim putem sabrati dvije struje date u trigonometrijskom obliku i prikazati rezultantnu struju u vektorskom obliku.

$$i_R = I_m \cdot \sin(\omega t + \theta) = 5 \cdot \sin(\omega t + \pi/4) + 5 \cdot \cos(\omega t + \pi/4)$$

$$\begin{aligned} i_R &= 5 \cdot \sin(\omega t + \pi/4) + 5 \cdot \cos(\omega t + \pi/4) = \\ &= 5[\sin \omega t \cdot \cos \pi/4 + \cos \omega t \cdot \sin \pi/4 + \cos \omega t \cdot \cos \pi/4 - \sin \omega t \cdot \sin \pi/4] = \\ &= 5[-\cos \pi/4(\sin \omega t + \cos \omega t) + \sin \pi/4(\cos \omega t - \sin \omega t)] = \\ &= 5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \omega t + \cos \omega t) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \omega t - \sin \omega t)\right] = \\ &= 5\frac{\sqrt{2}}{2}[\sin \omega t + \cos \omega t + \cos \omega t - \sin \omega t] = 5\frac{\sqrt{2}}{2}[2 \cdot \cos \omega t] = 5\sqrt{2} \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

odakle je:

$$i_R = 5\sqrt{2} \cdot \cos \omega t = 5\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \equiv I_m \cdot \sin(\omega t + \delta_R)$$

Dakle, imamo da je :

$$I_m = 5\sqrt{2}A, \quad \delta_R = \frac{\pi}{2}$$

U vektorskom obliku imamo:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$I_{mR}^2 = I_{m1}^2 + I_{m2}^2$$

Vidimo da su amplitude posmatranih signala jednake :

$$I_{mR}^2 = I_{m1}^2 + I_{m1}^2 = 2I_{m1}^2 \Rightarrow I_{mR} = 5\sqrt{2}V$$

$$\delta_R = \pi/2$$

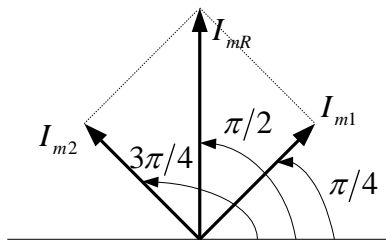
$$i_R = 5\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/2)$$

Za vektorski prikaz, potrebno je struju kosinusnog oblika, pretvoriti u sinusni oblik u kome možemo definisati fazni pomak kosinusne struje i na osnovu tog pomaka odrediti fazni pomak rezultantne struje:

$$i_2 = 5 \cos(\omega t + \pi/4) = 5 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = 5 \sin(\omega t + \frac{3\pi}{4})$$

Grafički prikaz sabiranja tih struja prikazanih vektorima, dat je na sledećoj slici(Sl. 32):

f.o.



Sl.32. Vektorski prikaz sabiranja dvije struje

34) Odrediti analitički i vektorski zbir struja $i_R = i_1 + i_2 + i_3$, ako je

$$i_1 = 20\sin(\omega t + \frac{\pi}{3}), i_2 = 20\sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) \quad \text{i} \quad i_3 = 5\sin \omega t .$$

Rješenje

Koristimo adicione teoreme zbira sinusa:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} , \text{ za koje dobijamo}$$

$$i_R = i_1 + i_2 + i_3 = 20[\sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) + \sin(\omega t - \frac{\pi}{3})] + 5 \sin \omega t =$$

$$= 20 \cdot 2 \sin \frac{\omega t + \frac{\pi}{3} + \omega t - \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{\omega t + \frac{\pi}{3} - \omega t + \frac{\pi}{3}}{2} + 5 \sin \omega t$$

$$i_R = i_1 + i_2 + i_3 = 20[\sin(\omega t + \frac{\pi}{3}) + \sin(\omega t - \frac{\pi}{3})] + 5 \sin \omega t =$$

$$= 40 \cdot \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + 5 \sin \omega t = 40 \cdot \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + 5 \sin \omega t$$

$$i_R = i_1 + i_2 + i_3 = 40 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 5 \sin \omega t = 40 \cdot \sin \omega t \cdot \frac{1}{2} + 5 \sin \omega t =$$

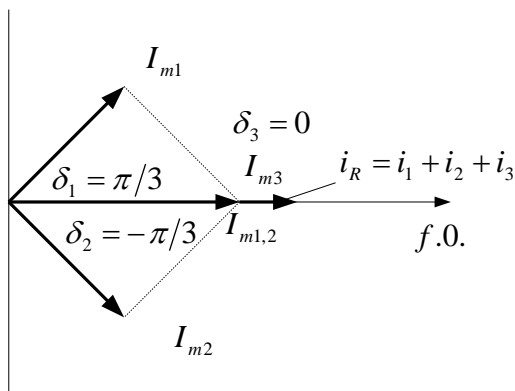
$$= 20 \cdot \sin \omega t + 5 \sin \omega t = 25 \cdot \sin \omega t$$

Dakle, konačno dobijemo:

$$i_R = i_1 + i_2 + i_3 = 25 \cdot \sin \omega t \dots\dots\dots 6.2$$

Iz relacije (33.1) vidimo da je fazni pomak rezultantne struje $\delta_R = 0$,

što grafički prikazano (Sl.33) izgleda:



Sl.33 Vremenski zbir struja $i_R = i_1 + i_2 + i_3 = 25 \cdot \sin \omega t$

- 35) Za paralelno R-L električno kolo izračunati kompleksnu impedansu, kompleksnu admitansu i fazni pomak između napona i struje u kolu. Dato je $R=10\Omega$, i induktivni otpor zavojnice (kalema) $X_L = \omega L = 20\Omega$. Nacrtati vektorski dijagram struja i trougao vodljivosti.

Rješenje

Impedansa paralelne veze R i L, je:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{10\Omega \cdot j20\Omega}{10\Omega + j20\Omega} = \frac{j200\Omega}{10 + j20} = \frac{j200\Omega \cdot (10 - j20)}{(10 + j20)(10 - j20)} = \\ &= \frac{(j2000 + 4000)\Omega}{100 + j200 - j200 + 400} = \frac{(j2000 + 4000)\Omega}{500} = (8 + j4)\Omega \Rightarrow \end{aligned}$$

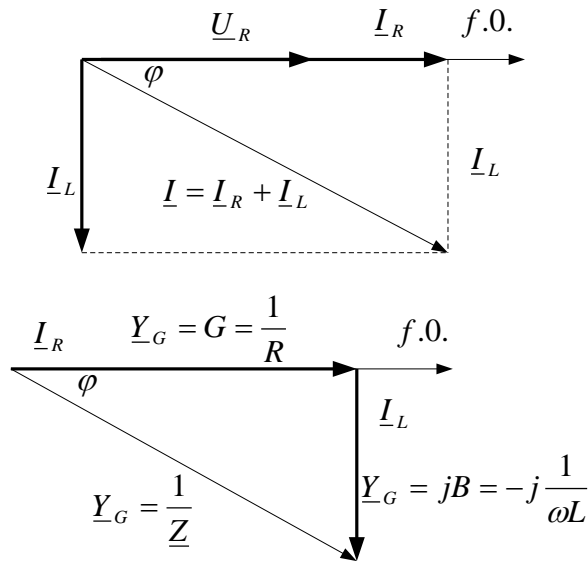
$$\underline{Z} = (8 + j4)\Omega.$$

Kompleksnu admitansu dobijamo analizom datog kola.

Sa šeme vidimo da je ukupna struja u kolu jednaka zbiru struja kroz otpor i zavojnicu:

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L \quad ; \quad \underline{I} / \underline{U} = \underline{I}_R / \underline{U} + \underline{I}_L / \underline{U} = G + jB, \text{ admitansa je}$$

$$\underline{Y} = G + jB,$$



Sl. 34 Fazorski prikaz odnosa napona i struja u paralelnom R-L kolu, trougao otpora, trougao provodnosti.

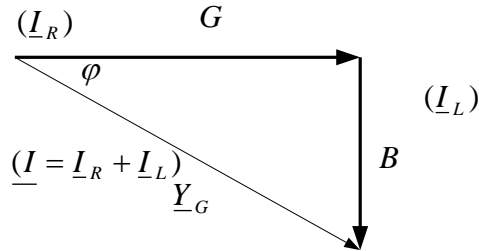
gdje je $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{10\Omega} = 0,1S$ -aktivna provodnost,

$$B = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{X_L} = -j \frac{1}{20\Omega} = 0,05S \text{ -reaktivna provodnost.}$$

Kompleksna admitansa uz vrijednosti provodnosti je:

$$\underline{Y} = G + jB = (0,1 - j0,05)S.$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE



Sl.35 Uz definiciju i proračun faznog pomaka (ili ugao) između napona i ukupne struje.

Fazni pomak (ili ugao) φ između napona i ukupne struje dobijemo iz trougla otpora/impedansi/ admitanse (Sl.35):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1/\omega L}{1/R} = \frac{R}{\omega L} = \frac{B}{G} = \frac{10\Omega}{20\Omega} = (\text{ili}) = \frac{0,05S}{0,1S} = 0,5 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0,5$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0,5 = 26,5^\circ.$$

Modul impedanse možemo izračunati iz relacije:

$$\underline{Z} = R + jX_L \Rightarrow |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 8,94\Omega.$$

36) Sijalica sa žarnom niti (vlaknom) snage 100 W priključena je na izvor naizmjeničnog napona $u = \sqrt{2} \cdot 220 \cdot \sin \omega t$. Izračunati:

- efektivnu vrijednost (I) i srednju vrijednost (I_{sr}) struje u kolu,
- otpornost (R) sijalice.

Rješenje:

Poznat je izraz za dovedeni napon $u = \sqrt{2} \cdot 220 \cdot \sin \omega t$ i snaga sijalice

$$P_{sijalice} = P_s = 100W.$$

a) Iz relacije:

$$P = U \cdot I \Rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{P}{\frac{U_m}{\sqrt{2}}} = \frac{100\text{W}}{\frac{\sqrt{2} \cdot 220\text{V}}{\sqrt{2}}} = \frac{100\text{W}}{220\text{V}} = 0,45\text{A} \equiv I_{ef}$$

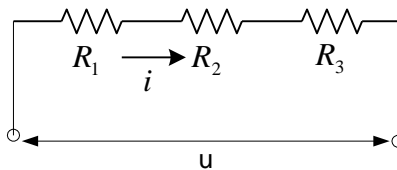
Po definiciji je srednja vrijednost struje:

$$\begin{aligned} I_{sr} &= \frac{2I_m}{\pi} = 2 \cdot \frac{I_m}{\pi} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot I_{ef}}{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot I_{ef} = \\ &= \frac{2}{3,14} \cdot 1,414 \cdot 0,45\text{A} = \frac{1,27}{3,14} = 0,405\text{A} \approx 0,41\text{A} \end{aligned}$$

b) Otpornost sijalice proračunavamo na osnovu Omovog zakona:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220\text{V}}{0,45\text{A}} = 488,688\Omega \approx 489\Omega.$$

37) Za kolo na slici izračunati struju u kolu, napisati njen trigonometrijski oblik i nacrtati vektorske dijagrame za napone i struju u kolu ako je dat izraz za priključeni napon na kolu: $u = 200\text{V} \cdot \sin(\omega t + \pi/4)$ i vrijednosti otpornosti: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 20\Omega$



Sl. 36. Šema kola.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Rješenje:

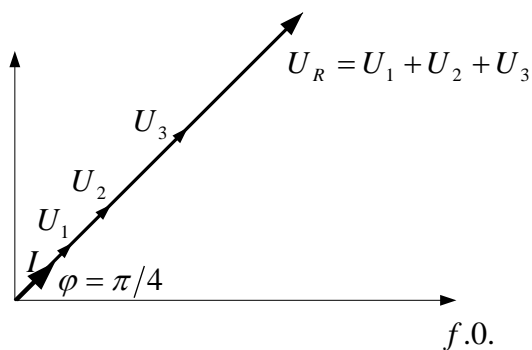
Ukupni otpor u kolu je $R_e = R_1 + R_2 + R_3 = (10 + 20 + 20)\Omega = 50\Omega$

Maksimalna vrednost (amplituda) struje je :

$$I_m = \frac{U_m}{R_e} = \frac{200V}{50\Omega} = 4A$$

Izraz za struju je: $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 4A \cdot \sin(\omega t + \pi/4)$.

Vektorski dijagram struje i napona, prikazan je na sledećoj slici, gde se vidi i fazni pomeraj struje i napona u odnosu na frekventu osu (f.o.), referentnu osu. Struja je u fazi sa naponom, jer se radi o omskim otporima u kolu.



Sl. 37. Vektorski dijagram struje i napona.

- 38) Odrediti izraz za struju i koja teče pod djelovanjem napona $u = 200V \cdot (\cos\pi/4 + j\sin\pi/4)$, a otpor $R = 20\Omega$.

Rješenje:

$$u = 200V \cdot (\cos \pi/4 + j \sin \pi/4) = 200V \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 100V(\sqrt{2} + j\sqrt{2})$$

Modul ovog kompleksnog broja

$$U^2 = (100\sqrt{2})^2 + (100\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 100^2 \Rightarrow U^2 = 4 \cdot 100^2 \Rightarrow$$

$$U = \sqrt{4 \cdot 100^2} = 200V = U_m$$

$$\text{Fazni pomak je : } \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} = \frac{100\sqrt{2}}{100\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ.$$

Struja dobiva oblik:

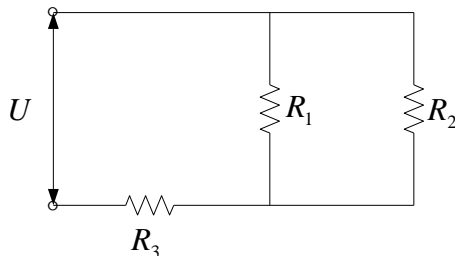
$$I_m = \frac{U_m}{R_e} = \frac{200\sqrt{2}V}{20\Omega} = 10\sqrt{2}A$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \theta) = 10\sqrt{2}A \cdot \sin(\omega t + 45^\circ).$$

39) Za kolo na Sl. 7.9. sa priključenim naponom $u = 200\sqrt{2} \cdot \sin \omega t$

$$R_1 = 75\Omega, \quad R_2 = 50\Omega \quad R_3 = 20\Omega$$

Napisati analitički izraz za struju kroz otpornik R_3 .



Rješenje:

Na kolo je priključen napon oblika:

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 200\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 0) = 200\sqrt{2} \cdot \sin \omega t$$

Napisati analitički izraz kroz otpornik za struju kroz otpornik R_3 .

Dato je:

$$R_1 = 75\Omega, \quad R_2 = 50\Omega \quad R_3 = 20\Omega$$

$$u = 200\sqrt{2} \cdot \sin \omega t$$

$$R_e = (R_1 \parallel R_2) + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{75\Omega \cdot 50\Omega}{75\Omega + 50\Omega} + 20\Omega = 50\Omega$$

Struja u kolu je:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

$$I_m = \frac{U_m}{R_e} = \frac{200\sqrt{2}V}{50\Omega} = 4\sqrt{2}A, \text{ pa je}$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \theta) = 4\sqrt{2}A \cdot \sin(\omega t + 0) = 4\sqrt{2}A \cdot \sin \omega t$$

40) Dati su izrazi za struje

$$i_1 = 5 \cdot \sin(\omega t + \pi/4) \quad i_2 = 5 \cdot \cos(\omega t + \pi/4)$$

Trigonometrijsko-analitičkim putem sabrati dvije struje date u trigonometrijskom obliku:

Rješenje:

$$i_R = I_m \cdot \sin(\omega t + \theta) = 5 \cdot \sin(\omega t + \pi/4) + 5 \cdot \cos(\omega t + \pi/4)$$

$$\begin{aligned} i_R &= 5 \cdot \sin(\omega t + \pi/4) + 5 \cdot \cos(\omega t + \pi/4) = \\ &= 5[\sin \omega t \cdot \cos \pi/4 + \cos \omega t \cdot \sin \pi/4 + \cos \omega t \cdot \cos \pi/4 - \sin \omega t \cdot \sin \pi/4] = \\ &= 5[\cos \pi/4(\sin \omega t + \cos \omega t) + \sin \pi/4(\cos \omega t - \sin \omega t)] = \\ &= 5\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \omega t + \cos \omega t) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \omega t - \sin \omega t)\right] = \\ &= 5\frac{\sqrt{2}}{2}[\sin \omega t + \cos \omega t + \cos \omega t - \sin \omega t] = 5\frac{\sqrt{2}}{2}[2 \cdot \cos \omega t] = 5\sqrt{2} \cdot \cos \omega t \end{aligned}$$

Odakle je:

$$i_R = 5\sqrt{2} \cdot \cos \omega t = 5\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \equiv I_m \cdot \sin(\omega t + \delta_R)$$

Dakle, imamo da je :

$$I_m = 5\sqrt{2}A, \quad \delta_R = \frac{\pi}{2}$$

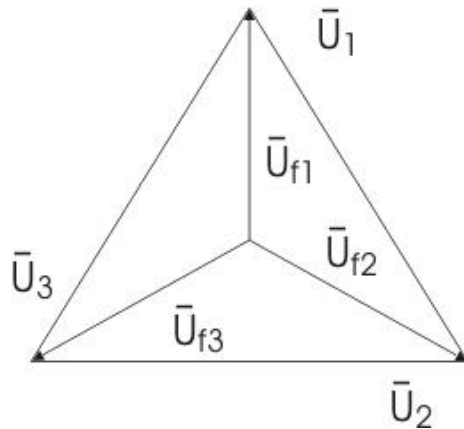
41) Dati su fazni naponi

$$\underline{U}_{f1} = (127 + j0)V, \quad \underline{U}_{f2} = (63,5 - j110)V,$$

$$\underline{U}_{f2} = (-63,5 + j110)V,$$

Izračunati linijske napone i efektivnu vrijednost za aktivne impedance po 100Ω vezane u zvijezdu.

Rješenje:



Sl. 39 Prikaz trofaznog napona

Između svakog faznog i nultog voda je prosti ili fazni napon: U_{f1}, U_{f2} i U_{f3} . Između dva fazna voda su linijski ili složeni naponi U_1, U_2 i U_3 koji su jednaki fazorskoj razlici dva fazna napona, što se dobija primjenom II Kirhofovog zakona (Sl. 39)

$$U_{f1} - U_1 - U_{f2} = 0 \quad \text{i} \quad U_1 = U_{f1} - U_{f2}$$

$$U_{f2} - U_2 - U_{f3} = 0 \quad \text{i} \quad U_2 = U_{f2} - U_{f3}$$

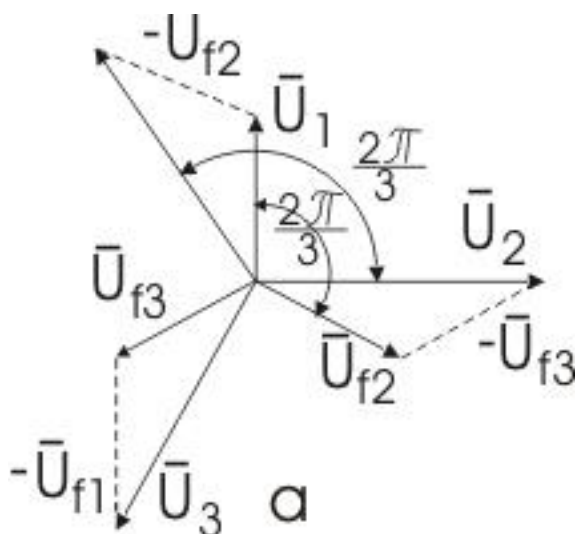
$$U_{f3} - U_3 - U_{f1} = 0 \quad \text{i} \quad U_3 = U_{f3} - U_{f1}$$

Sasvim je jasno da između faznog i linijskog napona kod veze u zvijezdu postoji isti odnos kao između fazne i linijske struje pri vezi u trougao: $I = \sqrt{3} \cdot I_f$.

U spoju trougla linijski naponi jednaki su faznim: $U_{lin} = U_{fazni}$, a linijska struja je za $\sqrt{3}$ puta veća od fazne, tj.: $I_{lin} = \sqrt{3}I_{fazna}$.

Kod spoja u zvijezdu je obrnuto: $U_{lin} = \sqrt{3}U_{fazni}$ $I_{lin} = I_{fazna}$.

Veza u zvijezdu je u prednosti pred vezom u trougao, jer sadrži dva napona: fazni i linijski napon, tj. za jednofazne i trofazne prijemnike.



Sl. 40. Fazorski dijagram linijskih i faznih napona.

Kod spoja u zvijezdu je : $U_{lin} = \sqrt{3}U_{fazni}$ $I_{lin} = I_{fazna}$. (vidi sliku 40) .Posmatrajući bilo koji trougao napona na ovoj slici, iz koga

$$\text{dobijemo: } \cos 30^{\circ} = (U_1/2)/U_{f1} = \frac{U_1}{2 \cdot U_{f1}}$$

Linijski naponi su:

$$U_1 = U_{f1} - U_{f2} = (127 + j0) - (-63,5 - j110) = (190 + j110)V$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$U_2 = U_{f2} - U_{f3} = (-63,5 - j110) - (-63,5 + j110) = (0 - j220)V$$

$$U_3 = U_{f3} - U_{f1} = (-63,5 + j110) - (127 - j0) = (-190 + j110)V$$

S obzirom da je

$$U_{f2} = (-63,5 - j110)$$

njegov modul je

$$|U_{f2}| = \sqrt{63,5^2 + 110^2} = \sqrt{4032,25 + 12100} = \sqrt{4032,25 + 12100} \approx 127[V]$$

Moduli svih faznih napona su jednaki, jer se radi o simetričnom trofaznom sistemu, pa možemo pisati:

$$|U_{f1}| = |U_{f2}| = |U_{f3}| \approx 127[V]$$

Dakle, i efektivne vrijednosti struje su iste u svim impedansama i iznose:

$$|U_{f1}| : Z = |U_{f2}| : Z = |U_{f3}| : Z = \frac{127V}{100\Omega} \approx 1,27[A]$$

42) U električnom kolu koga čini spoj generator i potrošač, ems i struja imaju sledeće vremenske oblike:

$$e(t) = 150 \cdot \sin(\omega t - 20^\circ)[V] \text{ i } i(t) = 30 \cdot \sin(\omega t - 20^\circ)[A],$$

frekvencija $f=50\text{Hz}$. 4

Izračunati vrijednost elemenata iz kojih se sastoji impedansa datog kola.

Rješenje:

S obzirom da su u posmatranom kolu struja i napon u fazi, možemo zaključiti da impedansa tog kola ima samo realnu komponentu, definisanu sa:

$$\bar{Z} = \frac{150V}{30A} = 5\Omega$$

To znači da se impedansa sastoji samo od otpornika $R = 5\Omega$ ili od redne veze R, L, C , takve da između redno vezanih elemenata $L[H]$ i $C[F]$, vrijedi relacija :

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{LC}} = 50Hz, \text{ jer je u tom slučaju imaginarni dio impedance}$$

jednak nuli.

- 43) Na redno vezano RLC kolo priključen je naizmjenični napon učestanosti $f=50Hz$. Na otporniku napon iznosi $40V$. Ako je dato $R=4\Omega$, $C=45\mu F$ i induktivnost $L=4mH$, izračunati: a) efektivnu vrijednost priključenog napona i napone na L i C , fazni ugao između struje kroz potrošač i napona na potrošaču.

Rješenje:

- a. Efektivna vrednost struje kroz potrošač je

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{40V}{4\Omega} = 10A. \text{ S obzirom da su svi elementi redno}$$

vezani, to je struja kroz L i C takođe $I_{L,C} = 10A$.

Prividne otpornosti L i C elemenata su:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50\text{Hz} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{H} = 1,26\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50\text{Hz} \cdot 40 \cdot 10^{-6} \text{F}} = 70,75\Omega$$

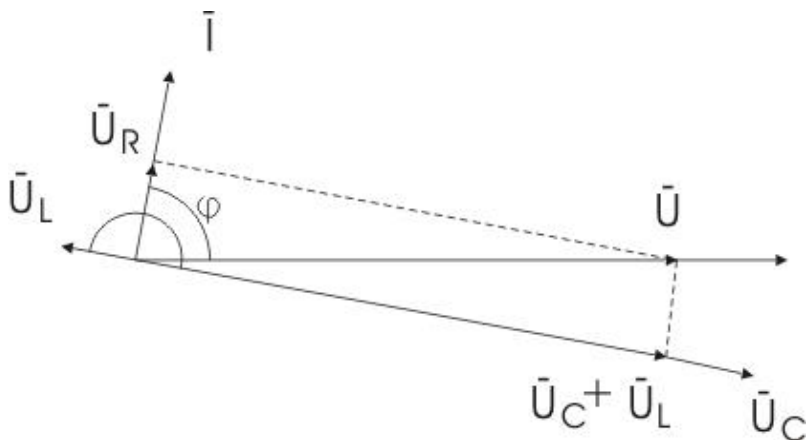
Napon na kondenzatoru: $U_C = I \cdot X_C = 10\text{A} \cdot 70,75\Omega = 707,5\text{V}$

Napon na induktivitetu: $U_L = I \cdot X_L = 10\text{A} \cdot 1,26\Omega = 12,6\text{V}$

Efektivna vrednost napon na prijemniku, odnosno rednoj vezi RLC elemenata je:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_C - U_L)^2} = \dots = 696\text{V}$$

Napon na krajevima prijemnika, redno vezanih R,L i C elementa, dobije se imajući u vidu da su fazor struje i napona na otporniku u fazi, napon na kondenzatoru fazno kasni za 90° u odnosu na struju, a napon na kalemu fazno prednjači struji za 90° , što je prikazano na Sl.7.11.



Sl. 41. Fazorski dijagram napona

Fazni ugao između struje kroz potrošač i napona na potrošaču:

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{40V}{696V} = 0,0574, \text{ odakle je}$$

$$\varphi = \arccos 0,0574 = -86,7^\circ \quad \varphi = -86,7^\circ.$$

Negativan predznak ugla φ označava da struja kroz potrošač prednjači naponu između njegovih krajeva.

44) Ako je kompleksni oblik napona na nekom prijemniku dat izrazom

$$\bar{U} = (83 + j125)V, \text{ a kompleksni izraz za struju kroz taj prijemnik}$$

$$\bar{I} = (5 - j4)A, \text{ izračunati prividnu, aktivnu i reaktivnu snagu tog prijemnika.}$$

Rješenje:

Prividnu snagu proračunavamo na bazi relacije:

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = P + jQ$$

Zamjenom datih brojnih vrijednosti dobijemo:

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = (83 + j125)V \cdot (5 + j4)A = (-85 + j957)VA \equiv P + jQ$$

(7.17.1.)

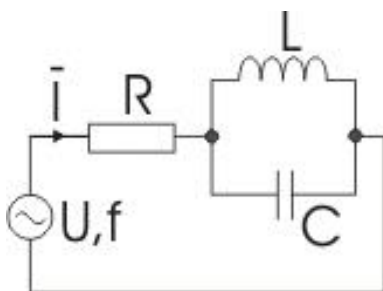
Iz ovog izraza vidimo da je aktivna snaga $P_a = -85W$, a modul prividne snage je :

$$|\bar{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(-85)^2 + (957)^2} = 960,77VA$$

Negativni predznak aktivne snage znači da prijemnik djeluje kao generator koji aktivnu snagu daje u mrežu.

Reaktivna snaga prema relaciji (7.17.1.) je $Q = 957$ [var], i ona osciluje između mreže i prijemnika.

- 45) Izračunati učestanost f priključenog napona na kolo na Sl. 7.12. da bi struja \bar{I} fazno prednjačila priključenom naponu za $\frac{\pi}{6}$ rad.



Sl. 42. jedna verzija R, L C kola.

Poznato je: $R = 13\Omega$, kalem induktivnosti $L = 1,5mH$, kondenzator kapaciteta $C = 3\mu F$.

Rješenje:

Prema datoj šemi, ekvivalentna impedansa potrošača

$$\text{je: } \bar{Z} = R - j \frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1}.$$

Kada struja prednjači naponu, tada je:

$$\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} > 0 \quad \text{i} \quad \varphi = \arctg \left(\frac{\omega L}{\omega^2 LC - 1} \right) = \arctg \left(\frac{\omega L}{R(\omega^2 LC - 1)} \right)$$

Gdje je φ - oštar ugao između fazora struje \bar{I} i napona \bar{U} . S obzirom da

je $\text{tg} \varphi = \text{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, zamjenom poznatih veličina dobija se kvadratna

jednačina po nepoznatoj učestanosti ω :

$$\omega^2 RLC - \sqrt{3}L\omega - R = 0$$

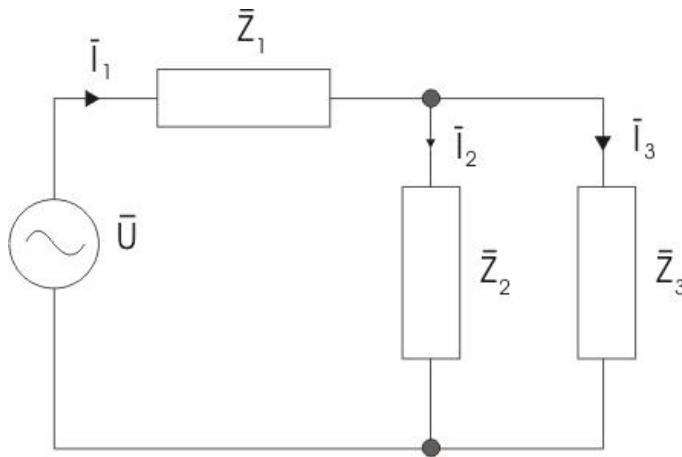
ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Uzimamo pozitivno rješenje ove jednačine $\omega \approx 48981 \frac{rad}{s}$, koje daje

kružnu učestanost pri kojoj struja fazno prednjači naponu za ugao $\frac{\pi}{6}$.

46) Na mješovitu vezu tri potrošača kao na Sl. 7.13, čije su impedanse, $Z_1 = (1 - j2)\Omega$, $Z_2 = (1 - j)\Omega$ i $Z_3 = (1 - j3)\Omega$, priključen je naponski generator naizmjenične struje, čija je efektivna vrijednost napona $U_{eff} \equiv U = 50V$. Izračunati:

- kompleksne izraze za struje u svim granama kola,
- efektivnu vrijednost napona na potrošaču Z_1 ,
- aktivnu snagu potrošača Z_2 i kompleksnu prividnu snagu potrošača Z_3 .



Sl. 43. Mješovita veza tri impedanse

Rješenje:

Ako uzmemo da je kompleksni izraz napona napajanja $\bar{U} = U \cdot e^{j0}$, tada će fazni pomjeraji ostalih veličina biti računati u odnosu na napon napajanja \bar{U} . Primjenom I i II KZ dobijemo:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

$$\bar{U} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 + \bar{Z}_2 \cdot \bar{I}_2$$

$$0 = \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_3 - \bar{Z}_2 \cdot \bar{I}_2$$

Zamjenom brožčanih vrijednosti i rješavanjem sistema jednačina nalazimo:

a) $\bar{I}_1 = (10 + j10)A$, $\bar{I}_2 = (5 + j15)A$, $\bar{I}_3 = (5 - j5)A$.

b) $U_1 = Z_1 I_1 = 31,62V$,

c) $P_2 = R_2 I_2^2 = 1\Omega \cdot 250A^2 = 250W$

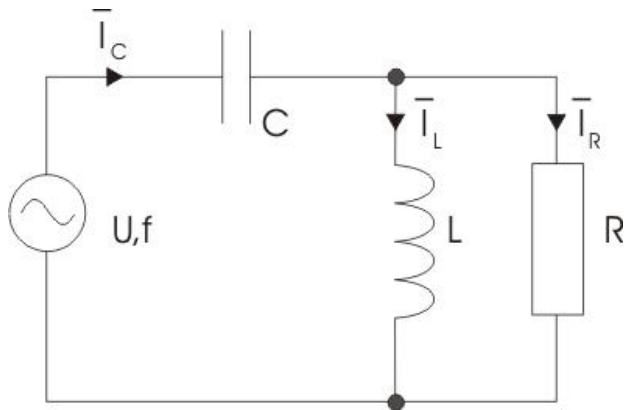
kompleksna prividna snaga potrošača S_3 je

$$\bar{S}_3 = \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_3^2 = (1 - j3) \cdot (5 - j5)^2 = (50 + j150)VA = P + jQ.$$

47) Za kolo na slici 44 izračunati:

- kompleksne izraze za označene struje,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu cjelog prijemnika(R,L,C),
- trenutnu vrijednost struje kroz kalem.

Poznato je: $R=50\Omega$, $C=20\mu F$ i induktivnost $L=50mH$ i trenutna vrijednost napona napajanja $u(t)=100V \cdot \sin \omega t$ i $\omega = 10^3 \frac{rad}{s}$



Sl. 44. Mješovita veza RLC elemenata

Rješenje:

Pojedinačne impedanse elemenata u kolu su:

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j10^3 \text{ rad/s} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ F}} = -j50\Omega$$

$$\bar{Z}_L = j\omega L = j10^3 [\text{rad/s}] \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ H} = j50\Omega$$

$$\bar{Z}_R = R = 50\Omega.$$

Kompleksni izrazi za struje:

$$\bar{I}_C, \bar{I}_L, \bar{I}_R$$

dobiju se na sličan način kao u prethodnom zadatku. Napon generatora je kompleksnog oblika :

$$\bar{U} = U \cdot e^{j0} = 50\sqrt{2}V$$

Na taj način dobijemo:

$$a) \bar{I}_C = \sqrt{2} + j\sqrt{2}A, \quad \bar{I}_L = \sqrt{2}A, \quad \bar{I}_R = j\sqrt{2}A$$

Efektivne vrijednosti ovih struja su:

$$\bar{I}_C = I_{C\text{eff}} = I = \sqrt{2} \cdot |I_C| = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} \right) = 1.41 \cdot 2 = 2,828 = 2,83A$$

,

$$I_L = \sqrt{2} \cdot |\bar{I}_L| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2A,$$

$$I_R = \sqrt{2} \cdot |\bar{I}_R| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2A$$

Kompleksna vrijednost impedanse potrošača je:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_C + \frac{\bar{Z}_L \cdot \bar{Z}_R}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R}$$

Kad uvrstimo brojčane vrijednosti, dobije se:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_C + \frac{\bar{Z}_L \cdot \bar{Z}_R}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_R} = -j50 + \frac{j50 \cdot 50}{j50 + 50} = (25 - j25)\Omega$$

Kompleksna prividna snaga na potrošaču dobije se uvrštavanjem

konjugovano kompleksne impedanse $\bar{S} = \frac{U^2}{\bar{Z}^*}$ ili konjugovano

kompleksne struje potrošača ($\bar{S} = U \cdot I^*$ ili $\bar{S} = \bar{Z} \cdot I^*$) i dobije se:

$$\bar{S} = \frac{U^2}{\bar{Z}^*} = \frac{(50\sqrt{2})^2}{25 + j25} = (100 - j100)VA,$$

Aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu cijelog prijemnika, možemo dobiti i iz **dobivenog izraza** za kompleksnu prividnu snagu na potrošaču:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\bar{S} = (100 - j100) \text{ VA} = P + jQ$$

odakle je aktivna snaga $P = 100 \text{ W}$, reaktivna snaga $Q = -100 \text{ var}$ i prividnu snagu

$$\bar{S} = (100 - j100) \text{ VA} = P + jQ \Rightarrow$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{10000 + 10000} = \sqrt{20000} = 141,42 \text{ VA}$$

Kompleksna vrijednost struje kroz kalem je $\bar{I}_L = \sqrt{2} \text{ A}$ odakle zaključujemo da je struja u fazi sa naponom u , pa je:

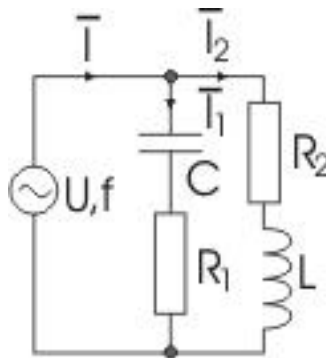
$$i(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(10^3 t) = 2 \sin(10^3 t) [\text{A}]$$

48) Za kolo na slici 45 izračunati:

- kompleksne izraze za označene struje,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu cijelog prijemnika (R, L, C),
- trenutnu vrijednost struje i napona kroz kalem i kondenzator.

Poznato je: $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $C = 20 \mu\text{F}$, induktivnost $L = 100 \text{ mH}$ i

trenutna vrijednost napona napajanja $u(t) = 100 \text{ V} \cdot \sin \omega t$ i $\omega = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



Sl.45. slika zadatka 48

Rješenje:

Efektivna vrijednost kompleksnog napona generatora je:

$$\bar{U} = 100V.$$

Impedanse paralelnih grana su:

$$\bar{Z}_1 = R_1 - jX_C = R_1 - j\frac{1}{\omega C} = 50 - j50 [\Omega]$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 + jX_L = R_2 + j\omega L = 100 + j100 [\Omega]$$

Kompleksi izrazi za struje $\bar{I}_C = \sqrt{2} + j\sqrt{2}A$,

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1} = 1 + j1[A], \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_2} = 0,5 - j0,5[A]$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 1,5 + j0,5[\Omega],$$

Kompleksni izraz za prividnu snagu potrošača je:

$$\bar{S} = U \cdot \bar{I}^* = 150 - j50[VA].$$

Aktivna snaga je: $P = \text{Re}\{\bar{S}\} = 150W$

Reaktivna snaga je: $Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = -50 \text{ var}$

Prividna snaga je: $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{150^2 + 50^2} = 158,11VA.$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Kompleksni izraz za struju kalema: $\bar{I}_2 = 0,5 - j0,5A$, možemo izraziti u eksponencijalnoj formi $\bar{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\varphi_2}$, gdje je

$$I_2 = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2} = 0,707 A, \text{ i } \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} = -0,7854 rad.$$

Izraz za trenutnu struju kroz kalem je:

$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

odnosno

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} \cdot 0,707 \cdot \sin(10^3 rad \cdot t + 0,7854 rad) = \\ &= 1,41 \cdot 0,707 \cdot \sin(10^3 rad \cdot t + 0,7854 rad) = 1,0889 \cdot \sin(10^3 rad \cdot t + 0,7854 rad) \\ &\approx 1 \cdot \sin(10^3 rad \cdot t + 0,7854 rad) [A]. \end{aligned}$$

Kompleksni izraz za napon na kondenzatoru je:

$$\bar{U}_C = -jX_C \cdot \bar{I}_1 = 50 - j50 [V]$$

Analogno za kompleksni napon na kondenzatoru imamo:

$$\bar{U}_C = U_C \cdot e^{j\varphi_C}, \quad \text{gdje je } U_C = \sqrt{50^2 + 50^2} = 70,71 V, \quad \text{i}$$

$$\varphi_C = -\frac{\pi}{2} = -0,7854 rad.$$

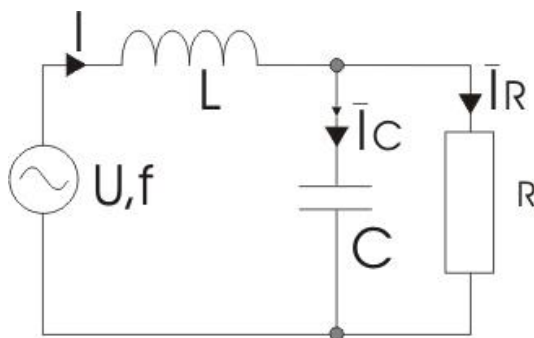
i konačno trenutna vrijednost napona na kondenzatoru:

$$u_C(t) = \sqrt{2} \cdot U_C \cdot \sin(\omega t + \varphi) \approx 70,71 \cdot \sin(10^3 rad \cdot t + 0,7854 rad) [V]$$

49) Za kolo na slici 46 izračunati:

- kompleksne izraze za označene struje,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu cjelog potrošača (R, L, C),
- trenutnu vrijednost struje i napona kroz kalem i kondenzator.

Poznato je: $R_1=50\Omega$, $R_2=100\Omega$, $C=20\mu F$, induktivnost $L=50mH$ i trenutna vrijednost napona napajanja $u(t)=100V \cdot \sin \omega t$ i $\omega = 10^3 \frac{rad}{s}$



Sl.46 šema zadatka 49

Rješenje:

Odredimo najprije prividne otpornosti komponenti L i C:

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = \omega L = 10^3 [\text{rad/s}] \cdot 5 \cdot 10^{-3} H = 50\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 [\text{rad/s}] \cdot 20 \cdot 10^{-6} F} = 50\Omega$$

Efektivna vrijednost kompleksnog napona generatora je:

$$\bar{U} = \frac{100}{\sqrt{2}} V$$

Kompleksni izrazi za struje

$$\bar{I}_L, \bar{I}_C, \bar{I}_R$$

dobiju se rješavajući sistem jednačina koje se formiraju primjenom prvog i drugog Kirhofovog zakona:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\bar{U} = jX_L(\bar{I}_C + I_R) - jX_C\bar{I}_C$$

$$0 = R \cdot \bar{I}_R - jX_C\bar{I}_C$$

Nakon sređivanja ovih jednačina i zamjene brojnih vrijednosti dobiva se

$$\bar{I}_C = \sqrt{2}[A], \quad \bar{I}_R = -j\sqrt{2}A, \quad I = \bar{I}_L = \sqrt{2} - j\sqrt{2}[A]$$

Kompleksna prividna snaga je:

$$\bar{S} = U \cdot \bar{I}^* = 100 + j100[\text{VA}]$$

Na osnovu čega se dobije:

$$\text{aktivna snaga: } P = \text{Re}\{\bar{S}\} = 100\text{W}$$

$$\text{reaktivna snaga: } Q = \text{Im}\{\bar{S}\} = 100\text{var}$$

$$\text{prividna snaga: } S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{150^2 + 50^2} = 141,42\text{VA.}$$

Kompleksni izraz za struju kondenzatora: $\bar{I}_C = \sqrt{2}[A]$, možemo izraziti

u eksponencijalnoj formi $\bar{I}_C = I_C \cdot e^{j\varphi_C}$, gdje je $I_2 = \sqrt{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}A$, i

$$\varphi_C = \text{arctg} \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \text{arctg} \frac{0}{\sqrt{2}} = 0[\text{rad}].$$

Izraz za trenutnu struju kroz kondenzator je:

$$i_c(t) = \sqrt{2} \cdot I_C \cdot \sin(\omega t + \varphi_C)$$

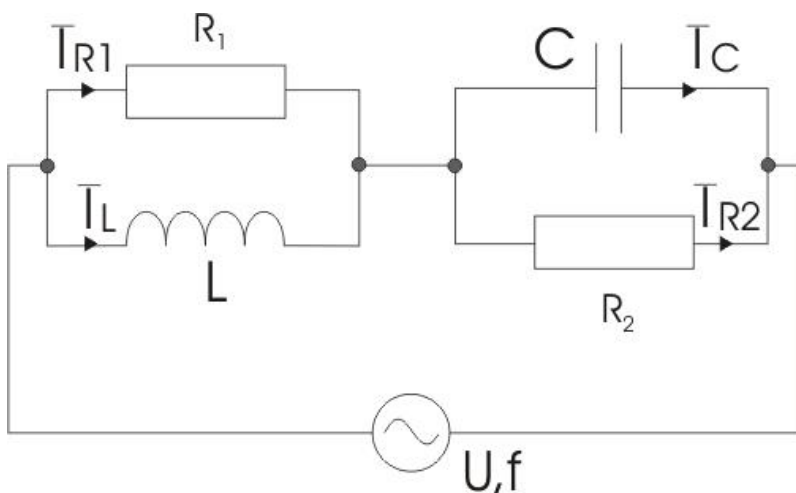
odnosno

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(10^3 \text{ rad/s} \cdot t + 0 \text{ rad}) = \\ &= 2 \cdot \sin 10^3 \text{ rad/s} \cdot t \equiv 2 \cdot \sin \omega \cdot t [A] \end{aligned}$$

50) Za kolo na slici 47. izračunati:

- kompleksne izraze za označene struje,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu cijelog potrošača(R,L,C),
- trenutnu vrijednost struje i napona kroz kalem i kondenzator.

Poznato je: $R_1=100\Omega$, $R_2=50\Omega$, $C=20\mu\text{F}$, induktivnost $L=100\text{mH}$ i trenutna vrijednost napona napajanja $u(t)=100\text{V} \cdot \sin \omega t$ i $\omega = 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$



Sl.47. Šema zadatka 50

Rješenje:

Prvo izračunamo prividne otpornosti L i C elemenata s:

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = \omega L = 10^3 \text{ rad/s} \cdot 100 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 100\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \text{ rad/s} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 50\Omega$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\bar{U} = \frac{100}{\sqrt{2}} V$$

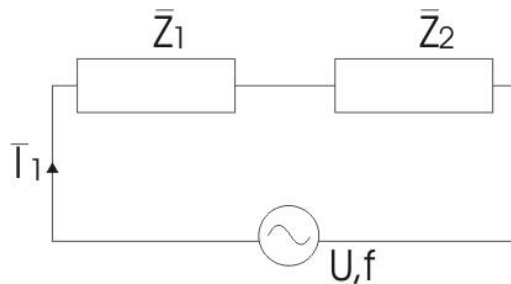
Izračunamo vrijednosti impedansi u kolu i nacrtamo pojednostavljenu šemu kao na Sl. 7.18.

$$\bar{Z}_1 = R_1 - jX_C = R_1 - j\frac{1}{\omega C} = 50 - j50 [\Omega]$$

$$\bar{Z}_1 = \frac{R_1 \cdot jX_L}{R_1 + jX_L} = \frac{100\Omega \cdot j100\Omega}{100\Omega + j100\Omega} = 50 + j50 \Omega$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{R_2 \cdot (-jX_C)}{R_2 - jX_C} = \frac{50\Omega \cdot (-j50\Omega)}{50\Omega - j0\Omega} = 25 - j25 \Omega$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{100/\sqrt{2}}{75 + j25} = 0,8485 - j0,2828 A$$



Sl. 48. Uproštena šema

Kompleksne vrijednosti označenih struja dobiju se iz uslova da je napon na ekvivalentnoj impedansi \bar{Z}_1 jednak naponu na otporniku R , odnosno na kalemu induktivnosti L .

$$\bar{I}_{R1} \cdot R_1 = \bar{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 \Rightarrow$$

$$\bar{I}_{R1} = \frac{\bar{Z}_1}{R_1} \cdot \bar{I}_1 = \frac{50 + j50}{100} \cdot (0,8485 - j0,2828) = 0,5657 + j0,2828 [\text{A}]$$

$$\bar{I}_L \cdot jX_L = \bar{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 \Rightarrow$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{Z}_1}{jX_L} \cdot \bar{I}_1 = \frac{50 + j50}{100 \cdot 10^{-3} H} \cdot (0,8485 - j0,2828) = 0,2828 - j0,5657 [\text{A}]^A$$

nalagno prethodnom postupku dobijemo da je

$$\bar{I}_C (-jX_C) = \bar{Z}_2 \cdot \bar{I}_2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_C &= \frac{\bar{Z}_2}{-jX_C} \cdot \bar{I}_2 = \frac{25 - j25\Omega}{(-j10^3 \text{ rad/s} \cdot 20 \cdot 10^{-6} F)} (0,8485 - j0,2828) \text{A} = \\ &= 0,5657 + j0,2828 [\text{A}] \end{aligned}$$

$$\bar{I}_{R2} \cdot R_2 = \bar{Z}_2 \cdot \bar{I}_2 \Rightarrow$$

$$\bar{I}_{R2} = \frac{\bar{Z}_2}{R_2} \cdot \bar{I}_2 = \frac{25 - j25}{50\Omega} (0,8485 - j0,2828) = 0,2828 + j0,5657 [\text{A}]$$

Ove rezultate možemo provjeriti primjenom relacije:

$$\bar{I}_C + \bar{I}_{R2} = \bar{I}_{R1} + \bar{I}_L = \bar{I} \equiv \bar{I}_2 \equiv \bar{I}_1$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

b)

$$\bar{S} = \bar{U} \cdot \bar{I}^* = \frac{100}{\sqrt{2}} V \cdot (0,8485 + j0,2828) = \frac{(84,85 + j28,28)}{1,41} \approx 60 + j20 [\text{VA}]$$

Iz ovog rezultata za prividnu snagu, aktivna snaga je realni dio, a reaktivna snaga je imaginarni dio, tj.:

$$P = 60W, \quad Q = 20\text{var}$$

Modul prividne snage je:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{60^2 + 20^2} = 63,2456\text{VA}$$

c) Napona na zavojnici je:

$$\bar{U}_L = \bar{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 = (50 + j50)\Omega \cdot (0,8485 - j0,2828)\text{A} = 56,57 + j28,28 [\text{V}] \Rightarrow$$

$$U_L = |\bar{U}_L| = \sqrt{56,57^2 + 28,28^2} = 63,245\text{V},$$

$$\varphi_L = \arctg \frac{28,28}{56,57} = \arctg 0,499 = 26,56^\circ$$

ili u radijanima, ugao u stepenima pretvaramo u radijane na sledeći način:

$$\alpha [\text{rad}] = \frac{\alpha [^\circ]}{180} \cdot \pi = \frac{\alpha [^\circ]}{180} \cdot 3,14$$

$$U_{\text{gao}} \alpha = 26,56^\circ \Rightarrow \alpha [\text{rad}]$$

$$\alpha[\text{rad}] = \frac{\alpha^{[0]}}{180} \cdot \pi = \frac{\alpha^{[0]}}{180} \cdot 3,14 = \frac{26,56^{[0]}}{180} \cdot 3,14 = 0,4636[\text{rad}] = \varphi_L$$

Trenutna vrijednost napona na kalem:

$$u_L(t) = \sqrt{2} \cdot U_L \cdot \sin(\omega t + \varphi_L) = 89,44 \cdot \sin(10^3 \text{ rad/s} \cdot t + 0,4636)[V].$$

51) Dva paralelno vezana prijemnika na slici 49 priključeni su na naizmjenični napon efektivne vrijednosti $U_{\text{eff}} = U = 220V$. Aktivna snaga prvog prijemnika je $P_{a1} = 600W$, a reaktivna snaga $P_{r1} = 450\text{var}$. Drugi prijemnik ima aktivnu otpornost $R_2 = 50\Omega$ i reaktivnu otpornost $X_2 = -10\Omega$.

Izračunati:

a) prividna snaga prvog prijemnika, P_{p1}

b) efektivne vrijednosti struja I_1 i I_2 u prijemnicima,

c) ukupnu aktivnu snagu P_{aUK} i ukupnu reaktivnu snagu P_{rUK} ,

d) efektivne vrijednosti struja $I_{\text{eff}} = I$.

Rješenje:

a) prividna snaga prvog prijemnika je:

$$P_{p1} = S_1 = \sqrt{P_{a1}^2 + Q_{r1}^2} = \sqrt{600^2 + 450^2} = 750VA.$$

b) Efektivna vrijednost struje $I_{\text{eff}1} = I_1 = \frac{P_{p1}}{U} = \frac{750VA}{220V} = 3,41A$.

Impedansa drugog prijemnika: $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} = \sqrt{50^2 + 10^2} = 51[\Omega]$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Efektivna vrijednost struje drugog prijemnika:

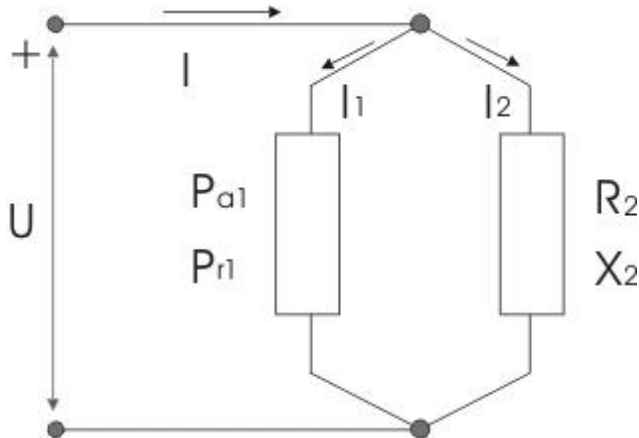
$$I_{eff2} = I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{220V}{51\Omega} = 4,3A$$

c) Aktivna snaga drugog prijemnika je:

$$P = \operatorname{Re}\{\bar{S}\} P_{a2} = R_2 \cdot I_2^2 = 50\Omega \cdot (4,3A)^2 = 925W$$

Reaktivna snaga je:

$$Q = \operatorname{Im}\{\bar{S}\} Q_2 = P_{r2} = X_2 \cdot I_2^2 = -10\Omega \cdot (4,3A)^2 = -185 \text{ var}$$



Sl. 49. Šema zadatka 51

Ukupna aktivna i reaktivna snaga oba prijemnika:

$$P_{aUK} = P_{a1} + P_{a2} = 600W + 925W = 1525W$$

$$P_{rUK} = P_{r1} + P_{r2} = 450 \text{ var} - 185 \text{ var} = 265 \text{ var}$$

d) Ako označimo sa φ faznu razliku između napona na krajevima kola i ukupne struje I u kolu, tada je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_{rUK}}{P_{aUK}} = \frac{Q_{rUK}}{P_{aUK}} = \frac{265}{1525} = 0,1737 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} 0,1737 = 9,8578^\circ$$

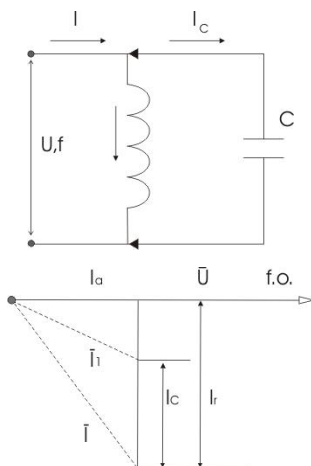
na osnovu čega je faktor snage kola

$$\cos \varphi = \cos 9,8578^\circ = 0,985.$$

Sada efektivna vrijednost ukupne struje I određena je izrazom:

$$I = \frac{P_{aUK}}{U \cos \varphi} = \frac{1525}{220 \cdot 0,985} = 7 \text{ A}$$

- 52) Na induktivni prijemnik na slici 50, priključen je naizmjenični napon efektivne vrijednosti $U_{\text{eff}} = U = 220 \text{ V}$ i frekvencije $f = 50 \text{ Hz}$. Data je efektivna vrijednost struje $I_{\text{eff}} = I = 20 \text{ A}$ i aktivna snaga prijemnika je $P_a = 2 \text{ kW}$. Odrediti kapacitet kondenzatora koji treba priključiti paralelno prijemniku da bi se dobio faktor snage $\cos \varphi = 0,9$



Sl. 50. Šema zadatka 52.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Rješenje:

Faktor snage prijemnika prije priključenja kondenzatora iznosi:

$$\cos\varphi = \frac{P_a}{UI} = \frac{2 \cdot 10^3 W}{200V \cdot 20A} = 0,5$$

aktivna i reaktivna komponenta struje u prijemniku iznose:

$$I_a = I_{eff} \cdot \cos\varphi = I \cdot \cos\varphi = 20A \cdot 0,5 = 10A$$

$$I_r = I_{eff} \cdot \sin\varphi = I \cdot \sin\varphi = 20A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,3A$$

Nakon priključenja kondenzatora kapaciteta C, faktor snage postaje $\cos\varphi_1 = 0,9$ prema uslovu zadatka (Sl. 7.20. b). Ukupna struja je:

$$I = \frac{P_a}{U \cdot \cos\varphi_1} = \frac{2000W}{200 \cdot 0,9} = 11,1A$$

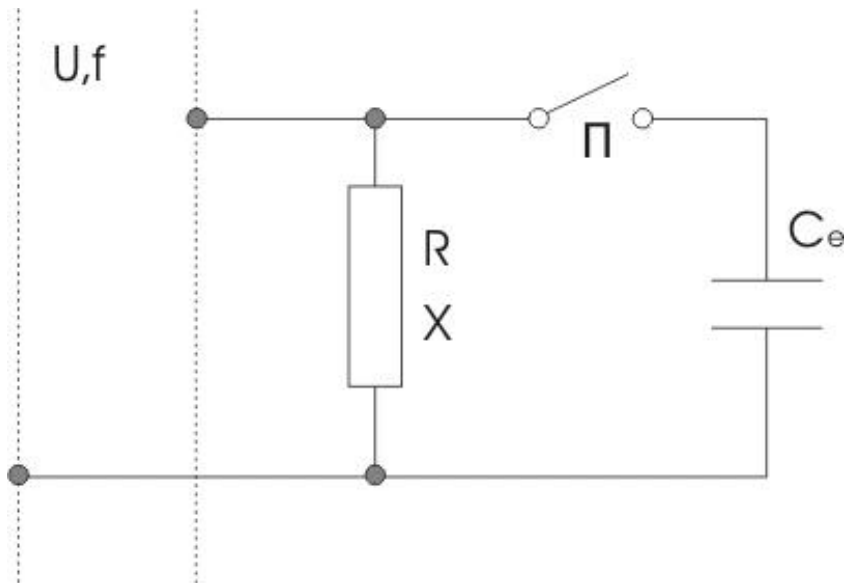
Efektivna vrijednost struje u grani sa kondenzatorom je

$$I_{effC} = I_C = \omega CU = I_r - I_1 \sin\varphi_1 = 17,3A - 11,1 \cdot \sqrt{1 - \cos^2\varphi_1} = \\ 17,3A - 11,1 \cdot \sqrt{1 - 0,81} = 12,5A$$

Traženu vrijednost kapaciteta za popravak faktora snage, dobijemo iz relacije:

$$C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{I_C}{2\pi f U} = \frac{12,5A}{314Hz \cdot 200V} = 190\mu F$$

- 53) Na induktivni prijemnik na slici 51 priključen na mrežu naizmjeničnog napona efektivne vrijednosti $U_{eff} = U = 230V$ i frekvencije $f=50Hz$, priključen je prijemnik kao na slici 5.13 peko napojnog voda od bakra, dužine $l = 100m$ i presjeka $S = 35mm^2$, zanemarljivo male reaktivne otpornosti. Za krajeve prijemnika vezana je preko prekidača Π baterija kondenzatora ekvivalentne kapacitivnosti $C_e = 300\mu F$. Prijemnik ima aktivnu otpornost $R = 1,7\Omega$ i reaktivnu otpornost $X = 1,4\Omega$.



Sl. 51. Šema zadatka 53

Izračunati promjenu snage gubitaka i faktor snage u napojnom vodu prije i posle zatvaranja prekidača.

Rješenje:

Otpornost napojnog voda je:

$$R_1 = \rho \frac{l}{S} = 0,0175 \left[\Omega \frac{mm^2}{m} \right] \cdot \frac{200m}{35mm^2} = 0,1\Omega$$

Kada je prekidač Π otvoren, impedansa voda i prijemnika je

$$\bar{Z}_1 = R_1 + R + jX = (0,1+1,7) + j1,4 = 1,8 + j1,4\Omega$$

Modul ove impedanse je

$$|\bar{Z}_1| \equiv Z_1 = \sqrt{R_{re}^2 + X^2} = \sqrt{1,8^2 + 1,4^2} = 2,3\Omega$$

Faktor snage voda za napajanje prijemnika je

$$\cos\varphi = \frac{R_e}{|Z_1|} = \frac{R + R_1}{Z_1} = \frac{(1,7 + 0,1)\Omega}{2,3\Omega} = 0,8$$

Efektivna vrijednost struje $I_{eff} = I$ u vodu za napajanje prijemnika je

$$I = \frac{U}{Z_1} = \frac{230V}{2,3\Omega} = 100A$$

Snaga gubitaka u vodu za napajanje prijemnika je

$$P_i = R_1 I^2 = 0,1\Omega \cdot 100^2 = 1000W$$

Kada je prekidač zatvoren, ukupna impedansa je

$$\bar{Z}_{ekv} = R_1 + \bar{Z}'_e = R_1 + \frac{\bar{Z} \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z} + \bar{Z}_2}$$

pri čemu je

$$\bar{Z}_2 = -j \frac{1}{\omega C_e} = -j \frac{1}{314 \cdot 300 \cdot 10^{-6}} = (-j10,6)\Omega$$

Pa je

$$\bar{Z}'_e = \frac{\bar{Z} \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z} + \bar{Z}_2} = \frac{(1,7 + j1,4) \cdot (-j10,6)}{(1,7 + j1,4) + (-j10,6)} = (2,18 + j1,21)\Omega$$

Modul ove impedanse je

$$|\bar{Z}'_e| \equiv Z_e = \sqrt{2,28^2 + 1,21^2} = 2,58\Omega$$

Faktor snage voda za napajanje prijemnika kada je prekidač \square zatvoren je

$$\cos\varphi = \frac{R_e}{|Z_e|} = \frac{R + R_1}{Z_e} = \frac{2,28\Omega}{2,58\Omega} = 0,884$$

Efektivna vrijednost struje u napojnomvodu je

$$|\bar{Z}'_e| \equiv Z_e = \sqrt{2,28^2 + 1,21^2} = 2,58\Omega, \quad I_1 = \frac{U}{|\bar{Z}'_e| \equiv Z_e} = \frac{230V}{2,58\Omega} = 89,15A$$

Snaga gubitaka uvodu za napajanje prijemnika je

$$P_1 = R_1 I^2 = 0,1\Omega \cdot 89,15^2 = 794,8W$$

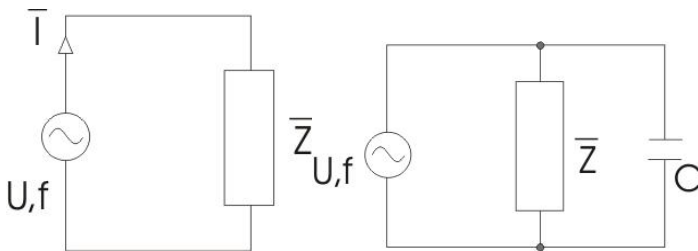
ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Kada je prekidač Π zatvoren-uključi, promjena snage gubitaka u napojnom vodu iznosi:

$$\Delta P = P_1 - P_1 = 794,8W - 1000 = -205,2 W$$

Dakle, posle zatvaranja prekidača, snaga gubitaka u napojnom vodu se smanji za 205,2W, a faktor snage se popravio sa 0,8 na 0,884.

- 54) U kolu na Sl. 52. priključen je naizmjenični napon iz izvora ems frekvencije $f=50\text{Hz}$ na potrošač impedanse $Z = (1 + j)\Omega$. Izračunati vrijednost kapacitivnosti kondenzatora koji je potrebno priključiti paralelno potrošaču da bi se faktor snage popravio na vrijednost $\cos\varphi = 0,8$.



Sl. 52. zadatka 54

Rješenje:

Sa slike vidimo da je struja kroz potrošač, prije priključenja kondenzatora, jednaka struji generatora. Iz podatka za impedansu,

vidimo da je potrošač pretežno induktivan, pa struja \bar{I} zaostaje za naponom \bar{U} , a ugao zaostajanja je:

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctg \frac{1}{1} = \arctg 1 = 45^0 = \frac{\pi}{4}$$

Kada paralelno uključimo kondenzator (53), tada ekvivalentna admitansa, koja se vidi posmatrajući kolo sa strane priključaka generatora je:

$$\bar{Z}_e = \bar{Z} \parallel Z_C \Rightarrow \bar{Y}_e = \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{Z_C} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_e &= \frac{1}{\bar{Z}} + j\omega C = \frac{1}{1+j} + jX_C = \frac{1-j}{(1+j)(1-j)} + j\omega C = \frac{1-j}{2} + j\omega C = \\ &= 0,5 - j0,5 + j\omega C = 0,5 - j(0,5 - \omega C)\Omega \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\bar{Y}_e = 0,5 - j(0,5 - \omega C)\Omega$$

Prema uslovu zadatka, faktor snage nakon uključjenja kondenzatora je $\cos\varphi = 0,8$, pa dobijemo jednakost:

$$0,8 = \frac{0,5}{\sqrt{0,5^2 + (0,5 - \omega C)^2}}$$

$$0,8 = \frac{0,5}{\sqrt{0,5^2 + (0,5 - \omega C)^2}} \cdot \left| \right|^2, \quad 0,5^2 + (0,5 - \omega C)^2 = \left(\frac{0,5}{0,8} \right)^2$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

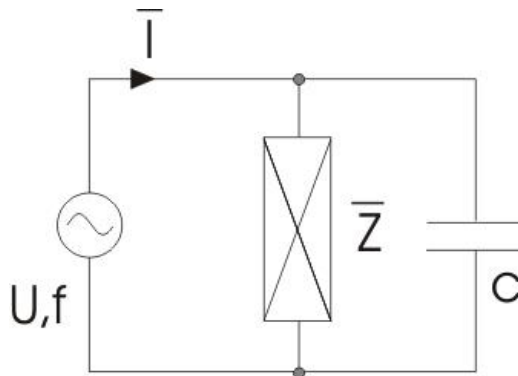
$$0,5^2 + (0,5 - \omega C)^2 = \left(\frac{0,5}{0,8}\right)^2, \quad (0,5 - \omega C)^2 = \left(\frac{0,5}{0,8}\right)^2 - 0,5^2$$

$$0,5 - \omega C = \sqrt{\left(\frac{0,5}{0,8}\right)^2 - 0,5^2} = \sqrt{\frac{0,5^2 - 0,5^2 \cdot 0,8^2}{0,8^2}} = \sqrt{\frac{0,5^2(1 - 0,8^2)}{0,8^2}} = \frac{0,5}{0,8} \sqrt{1 - 0,8^2}$$

$$= 0,625 \sqrt{1 - 0,64} = 0,625 \sqrt{0,36} = 0,625 \cdot 0,6 = 0,375 \Rightarrow 0,5 - \omega C = 0,375$$

$$0,5 - \omega C = 0,375 \Rightarrow -\omega C = 0,375 - 0,5 = -0,125 [\Omega]^{-1} \Rightarrow \omega C = 0,125 [\Omega]^{-1}$$

odakle je $C = \frac{0,125}{2\pi \cdot 50} = \frac{0,125}{314} \approx 398 \mu F$



Sl. 53 zadatak 54.

- 55) U kolu sa paralelno vezanom fluorescentnom cijevi aktivne snage $P=45W$ i kondenzatorom $C=4,5\mu F$ na Sl.7.23. da bi se faktor snage popravio na vrijednost $\cos\varphi = 0,8$, priključen je naizmjenični napon $U=220V$ iz izvora ems frekvencije $f=50Hz$. Izračunati:

a) reaktivnu snagu kondenzatora,

- b) reaktivnu snagu fluorescentne cijevi,
- c) faktor snage cijevi prije vezivanja kondenzatora.

Rješenje:

- a) Reaktivna snaga kondenzatora je:

$$Q_C = \frac{U^2}{X_C} = U^2 \cdot \omega C = U^2 \cdot 2\pi f \cdot C = (220V)^2 \cdot 2\pi \cdot 50Hz \cdot 4,5 \cdot 10^{-6} F = 68,42 \text{ var}$$

- b) Kompleksna prividna snaga paralelne veze fluorescentne cijevi i kondenzatora je:

$$\bar{S} = P + j(Q_{\text{cevi}} - Q_C) = P + j(Q_{fc} - Q_C)$$

Na osnovu čega možemo izračunati ugao pomaka φ između napona i struje na osnovu datog $\cos\varphi = 0,8$ i njegove definicije iz trougla snaga:

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q_{fc} - Q_C)^2}} = 0,95$$

$$\varphi = \arccos 0,95 \Rightarrow \varphi = 18,19^\circ$$

$$\text{odakle je } (Q_{fc} - Q_C) = P \cdot \operatorname{tg}\varphi = 45W \cdot \operatorname{tg}18,19 = 45W \cdot 0,32 = 14,79 \text{ var}$$

$$Q_{fc} = 83,14 \text{ var}$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

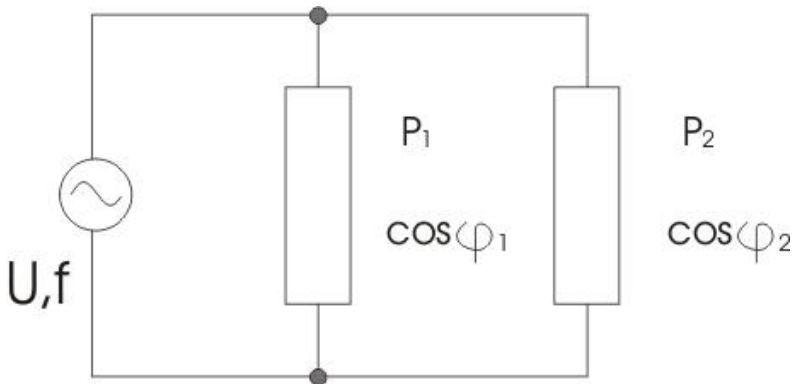
c)

$$\cos\varphi_1 = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q_{fc})^2}} = \frac{45W}{\sqrt{2025 + 6912,25}} = \frac{45W}{\sqrt{8937,25W^2}} = \frac{45}{94,53} = 0,47$$

56) U kolu na Sl.7.24. paralelno je kapacitivnom potrošaču aktivne snage $P_1=45\text{kW}$ i faktora snage $\cos\varphi_1 = 0,8$ vezan je pretežno induktivni potrošač aktivne snage $P_2=3\text{kW}$ i faktora snage $\cos\varphi_2 = 0,75$. Na kolo je priključen naizmjenični napon $U=220\text{V}$ i frekvencije $f=50\text{Hz}$.

Izračunati:

- ukupnu aktivnu snagu
- ukupnu reaktivnu snagu,
- ukupnu prividnu snagu,
- faktor snage sistema.
- efektivnu vrijednost struje koju paralelna veza potrošača uzima iz mreže.



Sl. 54. Veza potrošača u kolu

Rješenje:

- a. Ukupna aktivna snaga

$$P_a = P_1 + P_2 = (2,67 + 3)kW = 5,67kW$$

- b. Ukupna reaktivna snaga

Iz faktora snage $\cos\varphi_1 = 0,8$ i faktora snage $\cos\varphi_2 = 0,75$, nalazimo uglove pomaka $\varphi_1 = 36,87^\circ$ i $\varphi_2 = 41,41^\circ$

pa je ukupna reaktivna snaga:

$$Q_1 = -P_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 = -2,67 \cdot \operatorname{tg}36,87^\circ = -2,67 \cdot 0,75 \operatorname{var} = -2,0025 \operatorname{var}$$

$$Q_2 = P_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = 3 \cdot \operatorname{tg}41,41^\circ = 3 \cdot 0,88 \operatorname{var} = 2,646 \operatorname{var}$$

- c. Ukupna prividna snaga

$$\bar{S}_1 = P_1 + Q_1 = (2,67 - j2,002) \operatorname{kVA}$$

$$\bar{S}_2 = P_2 + Q_2 = (3 + j2,646) \operatorname{kVA}$$

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = (P_1 + P_2) + j(Q_2 - Q_1) = (5,67 + j0,644) \operatorname{kVA}$$

Iz ovog rezultata se vide vrijednosti ukupne aktivne i reaktivne snage.

Modul prividne snage je

$$S = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_2 - Q_1)^2} = \sqrt{5,67^2 + 0,644^2} = 5,706 \operatorname{kVA}$$

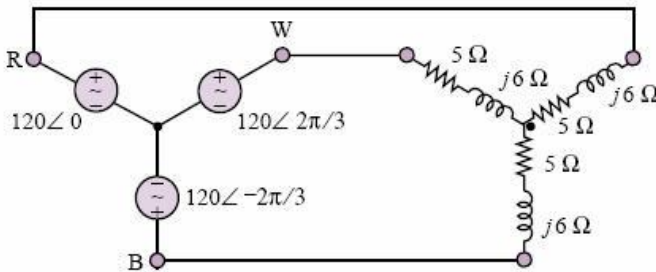
- d. faktor snage sistema.

$$\cos\varphi = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_2 - Q_1)^2}} = \frac{5,67kW}{5,706 \operatorname{kVA}} = 0,994$$

- e. Efektivna vrijednost struje koju paralelna veza potrošača uzima iz mreže:

$$I = \frac{S}{U} = \frac{5,706 \text{ kVA}}{220 \text{ V}} = 25,94 \text{ A}$$

6.1 TROFAZNI SISTEMI



Sl. 55. Trofazni sistem

57) Za zadani Y-Y trofazni sistem prikazan na slici Sl. 7.2.1.potrebno je izračunati:

- linijske struje, prikazane u fazorskom obliku
- prividnu snagu prijemnika (potrošača)
- faktor snage prijemnika
- napon na induktivitetu povezanog s tačkom B na slici
- struju kroz nul-vodič.

Rješenja:

a)

$$i_1 = \frac{120 \angle 0^\circ}{5 + 6j} = \frac{120 \angle 0^\circ}{7.81 \angle 50.19^\circ} = 15.37 \angle -50.19^\circ$$

$$i_2 = \frac{120 \angle 120^\circ}{5 + 6j} = \frac{120 \angle 120^\circ}{7.81 \angle 50.19^\circ} = 15.37 \angle 69.81^\circ$$

$$i_3 = \frac{120 \angle -120^\circ}{5 + 6j} = \frac{120 \angle -120^\circ}{7.81 \angle 50.19^\circ} = 15.37 \angle -170.19^\circ$$

b) $S = 3 \cdot (I_1^2 \cdot Z_1) = 3 \cdot (15.37^2 \cdot 7.81) = 5.53 \text{ kVA}$

c)

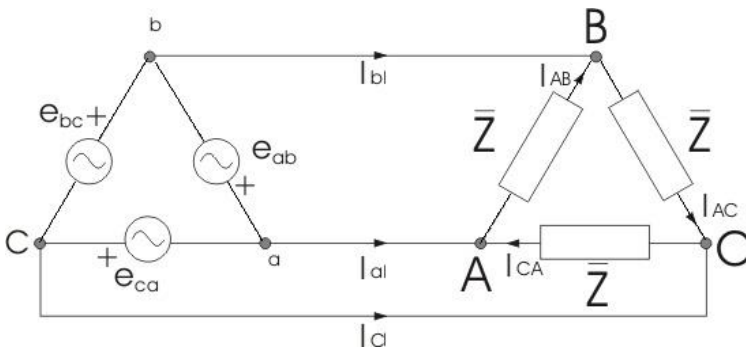
$$P = 3 \cdot (I_1^2 \cdot R_1) = 3 \cdot (15.37^2 \cdot 5) = 3.54 \text{ kW}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{3.54}{5.53} = 0.64$$

d) $V_{\text{indukt}} = i_3 \cdot 6j = 15.37 \angle -170.19^\circ \cdot 6 \angle 90^\circ = 92.22 \angle -80.19^\circ \text{ V}$

e) Simetrično trošilo, struja kroz nulvodič je 0 A

- 58) Na trofazni sistem napona 3x380V priključen je trofazni potrošač, povezan u trougao. Impedansa svake faze iznosi $Z_f = (2 - j20)\Omega$. Izračunati efektivnu vrijednost faznih struja i aktivnu snagu potrošača.



Sl. 56 Trofazni sistem sa trofaznim potrošačem

Rješenje:

Sistem 3x380V označava linijske napone iste efektivne vrijednosti $U_{eff} = U_{1eff} \equiv U_1 = 380V$, koji su međusobno fazno pomjereni za 120° .

Na Sl.7.2.2 prikazan je trofazni sistem linijskih napona tako što su tri generatora, čije su ems e_{ab}, e_{bc}, e_{ca} vezani u trougao. Trenutne vrijednosti napona na izlazu ovih generatora su:

$$e_{ab} = \sqrt{2} \cdot 380V \cdot \sin(\omega t)$$

$$e_{bc} = \sqrt{2} \cdot 380V \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$e_{ca} = \sqrt{2} \cdot 380V \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

ili

$$e_{bc} = \sqrt{2} \cdot 380V \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Naponi čine simetrični trofazni sistem napona na koji je priključen simetričan trofazni potrošač spregnut u trougao.

Vrijednosti faznih struja dobijemo:

$$\bar{I}_{AB} = \frac{E_{abEf}}{\bar{Z}} = \frac{380V}{20 - j20[\Omega]} = 9,5 + j9,5A,$$

modul ove struje je

$$|\bar{I}_{AB}| = \sqrt{9,5^2 + 9,5^2} = 13,43A, \quad \varphi_{AB} = 45^\circ$$

$$\bar{I}_{BC} = \frac{E_{bcEf}}{Z} = \frac{380V \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{20 - j20[\Omega]} = (3,48 - j12,98)A,$$

modul ove struje je

$$|\bar{I}_{BC}| = \sqrt{3,48^2 + 12,98^2} = 13,43A, \quad \varphi_{BC} = -75^0$$

$$\bar{I}_{CA} = \frac{E_{caEf}}{Z} = \frac{380V \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}}{20 - j20[\Omega]} = (-12,98 + j3,48)A,$$

modul ove struje je

$$|\bar{I}_{BC}| = \sqrt{12,98^2 + 3,48^2} = 13,43A, \quad \varphi_{BC} = 165^0$$

Aktivna snaga potrošača je:

$$P = 3U_f I_f \cdot \cos\varphi = 3 \cdot 380V \cdot 13,43A \cdot \cos45^0 = 10,83kW.$$

59) Na trofazni sistem napona 3x380V priključen je trofazni potrošač, povezan u zvijezdu. Impedansa svake faze iznosi $Z_f = (3 - j4)\Omega$.

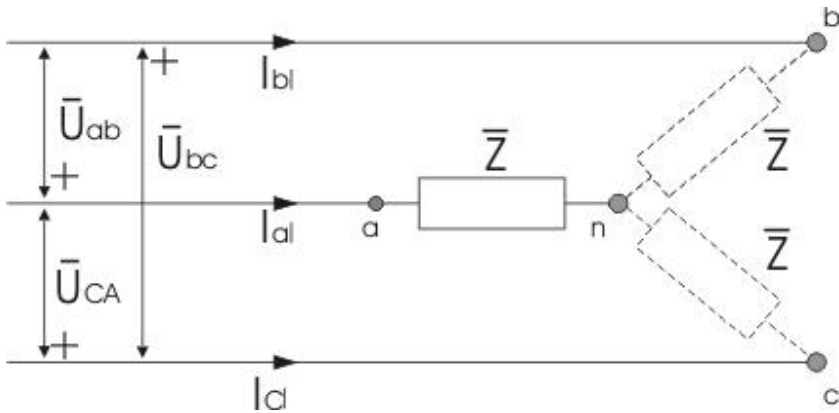
Izračunati efektivnu vrijednost linijskih struja i aktivnu snagu potrošača.

Rješenje:

Sistem 3x380V označava linijske napone iste efektivne vrijednosti

$U_{eff} = U_{1eff} \equiv U_1 = 380V$, koji su međusobno fazno pomjereni za 120^0 .

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE



Sl. 57. Prikazan je trofazni sistem prema uslovu zadatka

Na Sl.57 prikazan je trofazni sistem prema uslovu zadatka. Simetrični sistem linijskih napona na koje je priključeno opterećenje spregnuto u zvijezdu, tako što su tri generatora, čije su ems e_{ab} , e_{bc} , e_{ca} vezani u zvijezdu. Trenutne vrijednosti napona na izlazu ovih generatora su:

$$\bar{U}_{ab} = 380V \cdot e^{j0}$$

$$\bar{U}_{bc} = 380V \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{U}_{ca} = 380V \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$$

Kod simetričnih trofaznih sistema, trofazni prijemnik je simetričan, slijedi da će fazni naponi takođe činiti simetričan sistem.

S obzirom da je $\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0$

slijedi da je: $\bar{U}_{an} + \bar{U}_{bn} + \bar{U}_{cn} = 0$

Dalje je:

$$\bar{U}_{ab} = \bar{U}_{an} - \bar{U}_{bn}$$

$$\bar{U}_{bc} = \bar{U}_{bn} - \bar{U}_{cn}$$

$$\bar{U}_{ca} = \bar{U}_{cn} - \bar{U}_{an}$$

Na bazi ove četiri jednačine, izračunavamo kompleksne prikaze faznih napona:

$$\bar{U}_{an} = \frac{\bar{U}_{ab} - \bar{U}_{ca}}{3}$$

$$\bar{U}_{bn} = \frac{\bar{U}_{bc} - \bar{U}_{ab}}{3}$$

$$\bar{U}_{cn} = \frac{\bar{U}_{ca} - \bar{U}_{bc}}{3}$$

$$\bar{U}_{an} = \frac{380V}{3} \left(1 - e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) = \frac{380V}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) = \frac{380V}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\bar{U}_{bn} = \frac{380V}{3} \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 1 \right) = \frac{380V}{3} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} \left(1 - e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) = \frac{380V}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{5\pi}{6}}$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\bar{U}_{bn} = \frac{380V}{3} \left(e^{j\frac{2\pi}{3}} - e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) = \frac{380V}{3} \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} \left(1 - e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) = \frac{380V}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Kompleksni izrazi linijskih struja:

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{U}_{an}}{\bar{Z}_f} = 40,35 + j17,24[A] \quad , \quad I_a = 43,88A$$

$$\bar{I}_b = \frac{\bar{U}_{bn}}{\bar{Z}_f} = 5,25 - j43,56[A] \quad , \quad I_b = 43,88A$$

$$\bar{I}_c = \frac{\bar{U}_{cn}}{\bar{Z}_f} = -35,10 + j26,33[A] \quad , \quad I_c = 43,88A$$

Prividna snaga na potrošaču može se izračunati polazeći od opšteg izraza:

$$\bar{S} = \bar{U}_{an} \cdot \bar{I}_a^* + \bar{U}_{bn} \cdot \bar{I}_b^* + \bar{U}_{cn} \cdot \bar{I}_c^*$$

S obzirom da je sistem simetričan, imamo da je

$$\bar{S} = 3 \cdot \bar{U}_{an} \cdot \bar{I}_a^* = 17,328 \cdot 10^3 - j23,104 \cdot 10^3 [VA]$$

Odakle su aktivna i reaktivna snaga:

$$P = 17,328 \text{ kW}$$

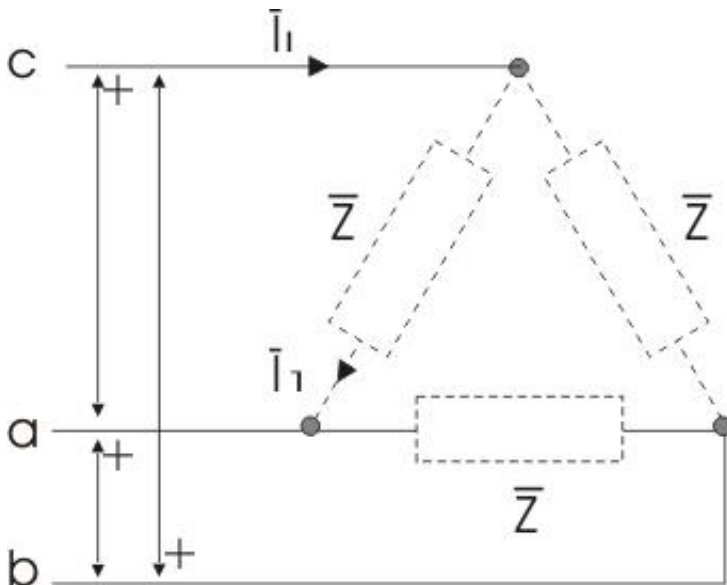
$Q = -23,104 \text{ k var}$.

60) Na trofazni sistem napona $3 \times 380 \text{ V}$ priključen je trofazni potrošač, povezan u trougao Sl. 58. Impedansa svake faze iznosi $Z_f = (30 + j40) \Omega$. Izračunati efektivnu vrijednost linijskih struja i reaktivnu snagu potrošača.

Rješenje:

Sistem $3 \times 380 \text{ V}$ označava linijske napone iste efektivne vrijednosti $U_{eff} = U_{1eff} \equiv U_1 = 380 \text{ V}$, koji su međusobno fazno pomjereni za 120° .

Na Sl.7.2.4.prikazan je trofazni potrošač povezan u trougao.



Sl. 58. Trofazni potrošač povezan u trougao

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Efektivna vrijednost fazne struje na trofaznom potrošaču je:

$$I_f = \frac{U_f}{Z_f} = \frac{U_l}{Z_f} = \frac{380V}{\sqrt{30^2 + 40^2} \Omega} = \frac{380V}{\sqrt{900 + 1600} \Omega} = \frac{380V}{\sqrt{2500} \Omega} = \frac{380V}{50 \Omega} = 7,6A$$

Iz odnosa fazne i linijske struje, izračunavamo linijsku struju:

$$I_l = \sqrt{3} I_f = \sqrt{3} \cdot 7,6A = 13,16A$$

Reaktivna snaga potrošača je:

$$Q = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 380V \cdot 7,6A \cdot \frac{40}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 6,93 \text{ k var}$$

7 TRANSFORMATORI

- 61) Dat je monofazni transformator za koji su dati sledeći podaci: broj navojaka primara $N_1 = 2500$, a sekundar $N_2 = 110$, napon primara $U_1 = 5kV$, $f = 50Hz$, omska otpornost sekundara $R_2 = 72,3m\Omega$, struja sekundara $I_2 = 45,5A$, efektivni presjek jezgra $S = 75cm^2$.

Izračunati:

- najveću magnetnu indukciju u jezgru transformatora,
- bukupnu aktivnu snagu sekundara ako transformator napaja potrošač čija je snaga $P_2 = 6kW$,
- reaktivnu snagu sekundara.

Rješenje:

Indukovana ems u primaru transformatora je $e_1 = -N \frac{d\Phi}{dt}$, gde je

$\Phi(t) = \Phi_m \cdot \cos \omega t$, na osnovu čega je:

$$e_1 = N_1 \cdot \Phi_m \cdot \omega \cdot \sin \omega t = E_{1m} \cdot \sin \omega t$$

$$E_{1m} = N_1 \cdot \Phi_m \cdot \omega = N_1 \cdot B_m \cdot S \cdot \omega = \sqrt{2} \cdot U_1$$

$$B_m = \frac{\sqrt{2} \cdot U_1}{N_1 \cdot S \cdot \omega} = 1,2 T$$

Ukupna aktivna snaga sekundara jednaka je zbiru aktivne snage potrošača i snage koja se troši na Džulove gubitke u namotajima sekundara:

$$P_s = R_2 I_2^2 + P_2 = 6,15 kW$$

Najprije izračunamo prividnu snagu sekundara:

$$S = U_2 \cdot I_2 = \frac{U_1}{N_1} \cdot N_2 \cdot I_2 = 10010 VA$$

Po definiciji reaktivna snaga je, i za sekundar na ovom transformatoru iznosi:

$$Q_s = \sqrt{S^2 - P^2} = 7898 \text{ var} .$$

- 62)** Primarni i sekundarni namotaji transformatora snage $P_n = 500 kVA$ imaju otpornost $R_1 = 0,42 \Omega$ i $R_2 = 0,001 \Omega$ respektivno. Napon primara $U_1 = 6,6 kV$, a napon sekundara $U_2 = 0,4 kV$, a gubici u trafo limovima (gvožđu) su $P_{Fe} = 2,9 kW$. Izračunati stepen korisnog

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

dejstva transformatora pri punom opterećenju, ako faktor snage opterećenja iznosi $\cos\varphi_2 = 0,8$.

Rješenje:

S obzirom da je transformator pod punim opterećenjem, prividna snaga potrošača je:

$$P_{p2} = P_n = 500kVA$$

a njegova aktivna snaga

$$P_{a2} = P_{p2} \cdot \cos\varphi_2 = P_n = 500kVA \cdot 0,8 = 400kW.$$

KKD se definiše kao količnik aktivne snage i ukupne snage Džulovih gubitaka:

$$\eta = \frac{P_a}{P_{D\check{z}.g.Cu}}$$

(7.3.1)

U tom smislu potrebno je izračunati ukupne snage Džulovih gubitaka prema izrazu:

$$P_{D\check{z}.g.Cu} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2$$

(7.3.2)

$$\text{gdje je } I_1 = \frac{P_n}{U_1} = \frac{500kVA}{6,6kV} = 75,75A \quad I_2 = \frac{P_n}{U_2} = \frac{500kVA}{0,4kV} = 1250A$$

Sada je ukupna snaga Džulovih gubitaka:

$$P_{D\dot{z}.g.Cu} = R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 = 0,42\Omega \cdot (75,76A)^2 + 0,001\Omega \cdot (1250A)^2 = 4,13kW$$

KKD je na osnovu relacija (7.3.1) i (7.3.2):

$$\eta = \frac{P_a}{P_{D\dot{z}.g.Cu}} = \frac{P_a}{R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2} = \frac{500kVA}{4,13kW} = 98,3\% .$$

63) Dat je monofazni transformator za koji su dati slijedeći podaci: broj navojaka primara $N_1 = 400$, a sekundar $N_2 = 1000$. Poprečni presjek gvožđe jezgra sa izolacijom limova iznosi $S=63 \text{ cm}^2$. Ako na primar(ulaz) transformatora priključimo napon $u(t)=705 \sin(314t)[V]$, izračunati:

- najveću vrijednost magnetne indukcije u gvožđu jezgra, ako na izolaciju i magnetno rasipanje otpada 5%,
- napon na izlazu(sekundaru) transformatora.

Rješenje:

Iz formule za izračunavanje vrijednosti napona na primarnoj strani transformatora $U_1 = 4,44 \cdot N_1 \cdot f \cdot \Phi_m$

možemo izračunati maksimalni fluks:

$$\Phi_m = \frac{U_1}{4,44 \cdot N_1 \cdot f}$$

Učestanost napona je $f = \frac{314}{2\pi} = 50Hz$,

A njegova efektivna vrijednost je

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$U_1 = U_{eff} = \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{705V}{1,41} = 500V .$$

Na osnovu dobivenih vrijednosti možemo izračunati maksimalnu vrijednost fluksa:

$$\Phi_m = \frac{U_1}{4,44 \cdot N_1 \cdot f} = \frac{500V}{4,44 \cdot 400 \cdot Hz} = 5,6 \cdot 10^{-3} Wb .$$

Ako imamo u vidu da je čisti presjek gvožđa manji zbog izolacije i magnetskog rasipanja na koje otpada 5% , dobijemo da je presjek željeza:

$$S_{Fe} = S_{Fe1} \cdot 0,95 = 63cm^2 \cdot 0,95 \approx 60cm^2$$

Po definiciji je amplituda intenziteta vektora magnetne indukcije iznosi:

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S_{Fe}} = \frac{5,6 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 10^{-4}} = 0,93T .$$

a) Izlazni (sekundarni) napon transformator dobijemo iz:

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{N_2}{N_1} = 500V \cdot \frac{1000}{400} = 1250V .$$

64) Za trofazni transformator nominalne snage $P_p = 20kVA$ i nominalnih vrijednosti napon primara $U_{1n} = 8kV$ i napona sekundara $U_{2n} = 0,5kV$. Namotaji primara su spregnuti u trougao, a sekundara u zvijezdu, čije su otpornosti: $R_1 = 20\Omega$ i $R_2 = 0,1\Omega$ respektivno. Izračunati:

- fazne napone,
- nominalne vrijednosti struje primara i sekundara,

- c. KKD transformatora, ako faktor snage potrošača priključenog na sekundar transformatora iznosi $\cos\varphi_2 = 0,5$. Gubici u jezgru transformatora iznose $P_{Fe} = 800W$.

Rješenje :

Navedeni način sprezanja primara i sekundara trofaznog transformatora, simbolički se označava simbolima $\Delta \prec$.

- a. napon $U_{1n} = 8kW$ je efektivna vrijednost linijskog napona primara koji je jednak faznom naponu, jer je primar spregnut u trougao.

Napon $U_{2n} = 0,5kW$ je efektivna vrijednost linijskog napona sekundara,

dok je fazni napon, $U_{2f} = \frac{U_{2l}}{\sqrt{3}} = \frac{500V}{\sqrt{3}} = 288,68V$, jer je primar spregnut u zvijezdu.

- b. Efektivna vrijednost linijske struje primara $U_{1l} = 0,5kW$ računa se prema formuli:

$$I_{1l} = \frac{P_p}{\sqrt{3}U_{1n}} = \frac{20 \cdot 10^3 VA}{\sqrt{3} \cdot 8000V} = 1,44A$$

Fazna struja je :

$$I_{1f} = \frac{I_{1l}}{\sqrt{3}} = \frac{1,44A}{\sqrt{3}} = 0,833A$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Efektivna vrijednost struje u liniji sekundara je

$$: I_{2l} = \frac{P_p}{\sqrt{3}U_{2n}} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ VA}}{\sqrt{3} \cdot 500 \text{ V}} = 23,1 \text{ A}, \text{ koliko iznosi i efektivna vrijednost}$$

fazne struje sekundara.

c. Aktivna snaga potrošača iznosi

$$P_2 = \sqrt{3} \cdot U_{2n} \cdot I_{2l} \cos \varphi_2 = 10 \text{ kW}.$$

Ukupna aktivna snaga koja se uzima iz mreže dobije se iz sledećeg izraza i nakon uvrštavanja poznatih vrijednosti dobije se:

$$P_2 + P_{gub} = P_2 + 3R_1 I_{1f}^2 + 3R_2 I_{2f}^2 + P_{Fe} = P_n = 11 \text{ kW}$$

KKD se definiše kao količnik aktivne snage i ukupne snage Džulovih gubitaka:

$$\eta = \frac{P_a}{P_{D\check{z}.g.Cu}} \quad \text{i na osnovu poznatih i izračunatih vrijednosti, dobijemo:}$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{gub}} = \frac{P_2}{P_2 + 3R_1 I_{1f}^2 + 3R_2 I_{2f}^2 + P_{Fe}} = \frac{10 \text{ kW}}{11 \text{ kW}} = 0,909.$$

7. ELEKTROMOTORI

ZADACI

- 65) Trofazni asinhroni dvopolni motor priključen na napon frekvencije **50 Hz** rotira brzinom **2900 min⁻¹**. Kolika je frekvencija rotorskih struja, te koliko iznose:
- brzina vrtnje okretnog protjecanja rotora u odnosu na rotor,
 - brzina vrtnje okretnog protjecanja rotora u odnosu na stator,
 - brzina vrtnje rotorskog protjecanja u odnosu na statorsko?

Rješenje:

Za elektromehaničko pretvaranje energije posredstvom magnetskih polja neophodno je da se statorsko i rotorsko magnetsko polje obrću istom brzinom.

Ukupna brzina obrtanja rotorskog magnetskog polja u odnosu na jednu fiksnu tačku statora (n_s) je zbir brzine obrtnog magnetskog polja rotora u odnosu na rotor (n_{or}) i brzine rotora (n) u odnosu na jednu fiksnu tačku statora:

$$n_s = n_{or} + n$$

Obrtno magnetsko polje se obrće u odnosu na jednu fiksnu tačku statora sinhronom brzinom:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$n_s = \frac{60f}{p} [\text{min}^{-1}]$$

Klizanje je razlika brzine obrtanja rotora n i brzine obrtanja obrtnog magnetskog polja n_s :

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{3000 - 2900}{3000} = 0,0333$$

$$f_r = s \cdot f_s = 0,0333 \cdot 50 \text{ Hz} = 1,667 \text{ Hz}$$

$$a) n_{r,rotor} = n_s - n_{rotor} = 3000 - 2900 = 100 \text{ min}^{-1} = n_{0r}$$

$$b) n_{r,stator} = n_{r,rotor} + n_{s,stator} = 100 + 2900 = 3000 \text{ min}^{-1} = n_s$$

$$c) n_{rs} = n_{r,stator} - n_{s,stator} = 3000 - 3000 = 0 \text{ min}^{-1}$$

66) Obrtano magnetno polje trofaznog asinhronog motora koji je priključen na naponsku mrežu frekvencije **50 Hz**, rotira brzinom **600 min⁻¹**.

Izračunajte:

- broj polova motora,
- dijametralni korak jednog namotaja statorskog namota izražen u geometrijskim stepenima.

Rješenje:

$$p = \frac{60f}{n} = \frac{60 \cdot 50 \text{ Hz}}{600 \text{ min}^{-1}} = 5 \Rightarrow$$

Odnosno iz broja pari polova slijedi broj polova motora:

$$p = \frac{60f}{n} = 5 \Rightarrow 2p = 2 \cdot 5 = 10 \text{ polova}$$

b) traženi dijametralni korak je :

$$y = \tau_p = \frac{360^0}{\text{broj polova}} = \frac{360^0}{10 \text{ polova}} \Rightarrow$$

67) Na trofaznom asinhronom motoru namotaji se mogu spojiti u zvijezdu ili trogao. Na natpisnoj pločici motora stoji podatak **400/690 V**.

- Kako treba spojiti namotaje motora ako ga želimo priključiti na napon **690 V**?
- Da li snaga konkretnog motora zavisi o iznosu priključenog napona (**400/690V**) uz pretpostavku ispravnog izbora spoja namota?
- Dali se namotaji mogu vezati u zvijezdu i trokut i koje su oznake stezaljki motora prema IEC normi u oba spoja.

Rješenje:

a) Namotaje treba spojiti u spoj zvijezda.

b)

$$P_Y = \sqrt{3} \cdot U_{lY} \cdot I_{lY} \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot U_{fY} \cdot I_{fY} \cdot \cos \varphi = 3 \cdot U_{fY} \cdot I_{fY} \cdot \cos \varphi$$

$$P_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_{lY} \cdot I_{lY} \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_{f\Delta} \cdot \sqrt{3} \cdot I_{f\Delta} \cdot \cos \varphi = 3 \cdot U_{f\Delta} \cdot I_{f\Delta} \cdot \cos \varphi$$

Iz ovih izraza se vidi da je snaga u oba slučaja priključenog napona ista.

$$P_Y = P_{\Delta} \text{ jer je } I_{fY} = I_{f\Delta} \text{ i } U_{fY} = U_{f\Delta}$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Snaga ne zavisi o iznosu priključenog napona.

c) Namotaji se standardno vezuju u zvijezdu ili trougao i za oba spoja stezaljke (priključke) elektromotora prema IEC normi (standard)

označavamo sa : U_1 , V_1 i W_1

- 68) Trofazni asinhroni kavezni motor **400 V**, spoj zvijezda, **5 kW**, **13,6 A**, prespojen je u trougao i prikljucen na trofazni napon mreže **230 V**.
- Koliku će struju uzimati iz mreže kod opterećenja **5 kW**?
 - Objasniti hoće li pri tome doći do pregrijavanja namota?
 - Koliko bi iznosila nazivna snaga motora prespojenog u trougao?

Rješenje:

- $I_{SA} = \sqrt{3} \cdot 13,6 \text{ A} = 23,56 \text{ A}$
- Neće doći do pregrijavanja namotaja, jer su fazni napon i fazna struja jednaki kao u spoju zvijezda
- $P_{nom\Delta} = \sqrt{3} \cdot U_{l\Delta} \cdot I_{l\Delta} \cdot \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot \frac{U_{lY}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot I_{lY} \cdot \cos\varphi = 5 \text{ kW}$

- 69) Asinhroni elektromotor sa 8 polova priključen je na mrežu frekvencije 50Hz ima brzinu rotacije rotora sa 825 o/min.
- U kom režimu radi elektromotor (motorski, generator ili kočnica)?

- b. Koliko je klizanje?
- c. Kolika je frekvencija rotorskih struja?

Rješenje:

a.
$$n_s = \frac{60f_s}{p} = \frac{60 \cdot 50}{4} = 750 [\text{min}^{-1}]$$

Vidimo da je $n > n_s$, odakle sladi da elektromotor radi kao generator.

b.
$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{750 - 825}{750} = -0,1$$

c.
$$f_r = s \cdot f_s = 0,1 \cdot 50 \text{ Hz} = 5 \text{ Hz} \quad \text{ili} \quad -5 \text{ Hz}$$

70) Koliko reaktivne (jalove) energije potroši mjesečno (30 dana rada po 24 sata) trofazni asinhroni motor: 125 kW, 735 min⁻¹, 237 A, 400 V, 50 Hz, cosφ = 0,84 ?

Rješenje:

$$\begin{aligned} E_{\text{reaktivna}} &\equiv E_{\text{jalova}} = Q \cdot t = \sqrt{3} \cdot U_s \cdot I_s \cdot \sin \varphi \cdot t = \\ &= \sqrt{3} \cdot 400 \text{ V} \cdot 237 \text{ A} \cdot \sqrt{1 - 0,84^2} \cdot 30 \text{ dana} \cdot 24 \text{ sata} = 64,146 \text{ MVarh} \end{aligned}$$

8. ELEKTRONIKA

Uvod u teoriju

Srednja energija koju fotoni predaju valentnim elektronima:

$$\bar{E} = \frac{3}{2} E_T [J] \dots\dots\dots 9.1$$

$$E_T = kT [J] \text{ -energetski ekvivalent termodinamičke temperature, } \dots\dots\dots 9.2.$$

$$E_T = kT [J] \equiv \frac{kT}{q} [eV] \dots\dots\dots 9.3.$$

Energetski nivoi za izolovani vodonikov atom dati su Borovim modelom atoma:

$$E = -\frac{m_0 q^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{13,6}{n^2} [eV] \dots\dots\dots 9.4$$

Koncentracija elektrona i šupljina poluprovodnika u termodinamičkoj ravnoteži vezane su zakonom o djelovanju masa:

$$n \cdot p = n_i^2 \dots\dots\dots 9.4.a$$

$$n_i^2 = CT^3 e^{-\frac{E_G}{kT}} \quad \text{ili} \quad n_i^2 = A_0 T^3 e^{-\frac{E_G}{kT}} \Rightarrow A_0 \equiv C$$

Temperaturna zavisnost širine zabranjenog pojasa i intrinzične koncentracije:

$$E_G = E_{G0} - \frac{aT^2}{T + b} \dots\dots\dots 9.5.$$

Za Si imamo:

$$E_G = 1,2 - 2,546 \cdot 10^{-4} T [eV] \dots\dots\dots 9.6.$$

$$n_i = 1,77 \cdot 10^{20} \left(\frac{T}{300} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{6965,4}{T}} [cm^{-3}] \dots\dots\dots 9.7.$$

Kad je poluprovodnik dopiran, pored jednačine (9.7) mora biti zadovoljena i jednačina električne neutralnosti, koja glasi:

$$N_D + p = N_A + n \dots\dots\dots 9.8.$$

N_D -koncentracija donora,

N_A -koncentracija akceptora.

Iz (9.4.a) i (9.8) nalazimo da je:

$$n = \frac{1}{2} \left[N_D - N_A + \sqrt{(N_D - N_A)^2 + 4n_i^2} \right] \dots\dots\dots 9.9.$$

$$p = \frac{1}{2} \left[N_A - N_D + \sqrt{(N_A - N_D)^2 + 4n_i^2} \right] \dots\dots\dots 9.10.$$

$$F(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \dots\dots\dots 9.11.$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Gdje je :

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} [JK^{-1}]$$

$$k = 8,62 \cdot 10^{-5} [eVK^{-1}]$$

$T [^{\circ}K]$ -apsolutna temperature u stepenima Kelvina,

E_F - Fermijev energetska nivo.

Fermijev energetska nivo je energija kod koje je vjerovatnoća da je elektron zauzeo energetska nivo sa tom energijom jednaka jednoj polovini :

$$f_{FD}(E) = 0,5 \equiv 50\%$$

funkcija raspodjele $f_{FD}(E)$ simetrična je oko Fermijevog nivoa E_F .

Za energije koje su $3kT$ iznad ili ispod Fermijevog nivoa, eksponencijalni član u (9.11) postaje veći od 20 ili manji od 0,05 respektivno.

Fermi–Dirakovu funkciju raspodjele:

$$f(E) = e^{\frac{-(E-E_F)}{kT}} \quad \text{za } E - E_F > 3kT \dots\dots\dots 9.12.$$

i

$$f(E) \approx 1 - e^{\frac{-(E_F-E)}{kT}} \quad \text{za } E - E_F < -3kT \dots\dots\dots 9.13.$$

prelazi u klasičnu Maksvel-Boltzmanovu funkciju raspodjele .

U fizičkom smislu Fermijeva energija predstavlja srednju vrijednost energije slobodnih čestica. Ovdje su to slobodni elektroni i šupljine. S obzirom da se elektroni nalaze u provodnoj zoni, a šupljine u valentnoj zoni, možemo očekivati da će se Fermijev nivo u polurovodnicima nalaziti između valentne i provodne zone. On će biti bliže provodnoj zoni, ako imamo više slobodnih elektrona, ili valentnoj zoni, kada imamo više šupljina.

Koncentracija sopstvenih nosilaca n_i dobije se iz

$$np = n_i^2 \dots\dots\dots 9.14.$$

$$n = p = n_i,$$

$$\begin{aligned} np &= N_c N_v e^{\frac{-E_G}{kT}} = \\ &= 4 \left(\frac{2\pi k}{h^2} \right)^3 (m_n m_p)^{3/2} \cdot T^3 \cdot e^{\frac{-E_G}{kT}} = CT^3 \cdot e^{\frac{-E_G}{kT}} \end{aligned}$$

$$np = N_c N_v e^{\frac{-E_G}{kT}} = CT^3 \cdot e^{\frac{-E_G}{kT}}$$

(9.15.)

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$E_G = E_C - E_V$$

$$C = 1,08 \cdot 10^{31} [cm^{-6} K^{-3}] \text{ za Si}$$

$$C = 3,24 \cdot 10^{29} [cm^{-6} K^{-3}] \text{ za Ga As.}$$

Jednačina $np = n_i^2$ zove se zakon dejstva masa, ili zakon o termodinamičkoj ravnoteži u poluprovodniku, a važi i za sopstvene i za primjesne poluprovodnike (tj. za poluprovodnike koji su dopirani primjesama).

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{\frac{-E_G}{2kT}} = BT^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{-E_G}{2kT}} \dots\dots\dots 9.16.$$

gdje je: $B = 1,04 \cdot 10^{15} [cm^{-6} K^{-1,5}]$ za Si

$$B = 5,69 \cdot 10^{14} [cm^{-6} K^{-1,5}] \text{ za GaAs}$$

8.1 KOMPENZOVANI POLUPROVODNICI

Kod kompenzovanih poluprovodnika, broj donora jednak je broju akceptora:

$$N_D = N_A$$

Kod ovih pp se naelektrisanje jonizovanih atoma donora kompenzuje sa naelektrisanjem jonizovanih atoma akceptora. Primjese koje su prisutne

u većoj koncentraciji određuju tip provodnosti poluprovodnika. Fermijev nivo mora da se postavi tako da očuva neutralnost naelektrisanja, da bi ukupno negativno naelektrisanje (elektroni i jonizovani akceptori) bilo jednako ukupnom pozitivnom naelektrisanju (šupljine i jonizovani donori):

Iz

$$n + N_D = p + N_A \dots\dots\dots 9.17.$$

i

$$np = n_i^2$$

dobijemo za **ravnotežnu koncentraciju elektrona i šupljina** u N-tipu p.p.

za $N_D > N_A$, sledeći izraz:

$$n_n = \frac{1}{2} \left[N_D - N_A + \sqrt{(N_D - N_A)^2 + 4n_i^2} \right]$$

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n}$$

Slično dobijemo za koncentraciju šupljina u P-tipu p.p., ako je

$$N_A > N_D$$

$$p_p = \frac{1}{2} \left[N_A - N_D + \sqrt{(N_A - N_D)^2 + 4n_i^2} \right]$$

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p}$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Uopšteno, veličina neto koncentracije primjesa $|N_D - N_A|$ je znatno veća od sopstvene (vlastite) koncentracije nosilaca n_i , zbog čega gornje relacije možemo pisati u pojednostavljenom obliku :

$$n_n = N_D - N_A \quad \text{ako je } N_D > N_A$$

$$p_p = N_A - N_D \quad \text{ako je } N_A > N_D.$$

U realnim poluprovodnicima redovno je u N-tipu $N_D \gg N_A$ i u P-tipu poluprovodnika je $N_A \gg N_D$, pa prethodne relacije možemo pisati u obliku:

$$n = N_D, \quad p = \frac{n_i^2}{N_D} \quad \text{za N-tip pp}$$

$$p = N_A, \quad n = \frac{n_i^2}{N_A} \quad \text{za P-tip pp .}$$

8.2 ZADACI IZ FIZIKE POLUPROVODNIKA I ELEKTRONIKE

71) Izračunati prosječan broj šupljina u kubnom santimetru uzorka silicijuma na temperature od $300^0 K$, ako je silicijum dopiran tako da na svakih 10^7 atoma čistog silicijuma dolazi jedan donorski atom.

Rješenje:

Broj donorskih atoma u $1cm^3$ iznosi

$$N_d = N \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{22} \frac{\text{atoma}}{cm^3} \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{15} cm^{-3},$$

tako da je ukupan broj elektrona n :

$$n = n_i + N_d = 1,5 \cdot 10^{10} + 5 \cdot 10^{15} \approx 5 \cdot 10^{15} cm^{-3}$$

Sada je broj šupljina prema jednačini koja daje vezu koncentracije(broja) elektrona i šupljina poluprovodnika u termičkoj ravnoteži:

$$n \cdot p = n_i^2 \Rightarrow p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{1,5 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^{15} cm^{-3}} = 4,5 \cdot 10^4 cm^{-3}$$

72) Uzorak germanijuma dopiran sa $N_d = 10^{14} cm^{-3}$ i

$N_a = 7 \cdot 10^{13} cm^{-3}$. Specifični otpor čistog germanijuma na datoj temperaturi na kojoj se nalazi germanijum je $\rho = 60 \Omega cm$ a pokretljivost elektrona i šupljina respektivno iznosi $\mu_n = 3900 cm^2/Vs$ i $\mu_p = 1900 cm^2/Vs$. Ako je ukupna gustina kondukcionne struje $52,3 mA/cm^2$ izračunati jačinu primijenjenog električnog polja.

Rješenje:

Fenomenološki oblik Omovog zakona za pp daje vezu između kondukcijske struje i električnog polja

$$J = \sigma E \dots\dots\dots 9.1.1.$$

odakle vidimo da je za proračun jačine polja E potrebno poznavati i specifičnu provodnost σ , koja se računa prema izrazu:

$$\sigma = q(\mu_n n + \mu_p p) \dots\dots\dots 9.1.2.$$

Za nalaženje specifičnu provodnost σ , potrebno je znati koncentracije elektrona i šupljina n i p , a koje se nalaze prema relacijama (9.9) i (9.10.). Prije toga treba prvo izračunati n_i iz poznate specifične otpornosti čistog germanijuma pomoću jednačine (9.1.2):

$$n_i = p_i = \frac{1}{\rho q(\mu_n + \mu_p)} = 1,8 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}.$$

Obzirom da je $N_D > N_A$, prvo treba izračunati n prema jednačini (9.9.)

$$n = \frac{N_D - N_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_D - N_A}{2}\right)^2 + n_i^2} = 3,84 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$

Koncentraciju šupljina možemo izračunati pomoću jednačine (9.14.):

$$np = n_i^2 \dots\dots\dots 9.14.$$

odakle je

$$p = \frac{n_i^2}{n} = 8,44 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}.$$

Sada na osnovu jednačine (9.1.) dobijemo

$$J = \sigma E \Rightarrow E = \frac{J}{\sigma} = \frac{J}{q(\mu_n n + \mu_p p)} = 1,97 \text{ V/cm}$$

jačina primijenjenog polja.

- 73) Izračunati veličinu potencijalne barijere PN spoja na 300^0 K , ako je P sloj strmog PN spoja dopiran sa jednim atomom primjesa na svakih 10^6 atoma silicijuma, a N sloj jednim atomom primjesa na svakih $5 \cdot 10^7$ atoma silicijuma.

Rješenje:

Veličina potencijalne barijere se računa prema izrazu (9.15.)

$$V_0 = V_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} \dots\dots\dots 9.15$$

Na osnovu podataka iz tabele-Prilog IV, nalazimo da je za silicijum

$$N = 5 \cdot 10^{22} \frac{\text{atoma}}{\text{cm}^3}, \text{ pa je za naš slučaj}$$

$$N_A = \frac{N}{10^6 \text{ atoma..Si}} = \frac{5 \cdot 10^{22}}{10^6} = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

i

$$N_D = \frac{N}{5 \cdot 10^7} = \frac{5 \cdot 10^{22}}{5 \cdot 10^7} = 10^{15} \text{ cm}^{-3},$$

i na osnovu jednačine (9.15) dobijemo vrijednost za veličinu potencijalne barijere:

$$V_0 = V_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} = 0,679V \approx 0,68V$$

74) Dioda sa strmim PN prelazom napravljena je od germanijuma P-tipa specifične otpornosti $10\Omega\text{cm}$ i germanijuma N-tipa specifične otpornosti $10\Omega\text{cm}$. Izračunati veličinu potencijalne barijere na temperaturi od 300^0K pretpostavljajući da samo glavni nosioci određuju specifičnu otpornost. Poznato je :

$$\mu_n = 3800\text{cm}^2/\text{Vs}$$

$$\mu_p = 1800\text{cm}^2/\text{Vs}$$

Rješenje:

Za proračun veličine potencijalne barijere potrebno je poznavati koncentracije donora i akceptora u N i P sloju pp. One se dobiju iz datih specifičnih otpornosti. Za sloj P-tipa iz jednačine (9.1.2) dobijemo :

$$\sigma = q(\mu_n n + \mu_p p) \Rightarrow$$

dobijemo

$$\sigma = \rho^{-1} = q\mu_p p$$

odakle je :

$$p \approx N_a = \frac{1}{\rho_p q \mu_p} = 1,64 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

$$N_D = \frac{n_i^2}{p} = \frac{2,25 \cdot 10^{20}}{1,64 \cdot 10^{15}} = 1,37 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-3}$$

Potencijalnu barijeru računamo prema izrazu (9.15.)

$$V_0 = V_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}$$

$$V_0 = 0,177V .$$

- 75) Izračunati probojni napon PN spoja sa strmim prelazom ako je koncentracija šupljina u P sloju $5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, a koncentracija elektrona u N sloju 10^{16} cm^{-3} . Jačina polja pri kome dolazi do proboja iznosi $E_{kritičri} = 3 \cdot 10^5 \text{ V/cm}$.

Rješenje :

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

S obzirom da je u P sloju $p \approx N_A$, a u N sloju $n \approx N_D$ i nakon zamjene brojnih vrijednosti, koje su date u zadatku, u izraz (9.16.) dobijemo:

$$BV = \frac{\varepsilon [N_A + N_D]}{2qN_A N_D} \cdot E_{krit.} = 88V \dots\dots\dots 9.16$$

8.3 POLUPROVODNIČKA DIODA U ELEKTRIČNOM KOLU

ZADACI

- 76) Primjenom analitičkog izraza (1) za struju kroz poluprovodničku diodu treba nacrtati karakteristiku $I_D = f(U_D)$ diode te grafički odrediti dinamički otpor u tački $U = 0,3 \text{ V}$ ako je zadano $I_S = 10 \mu\text{A}$,
 $V_T = 26 \text{ mV}$, $m = 2$.

Rješenje:

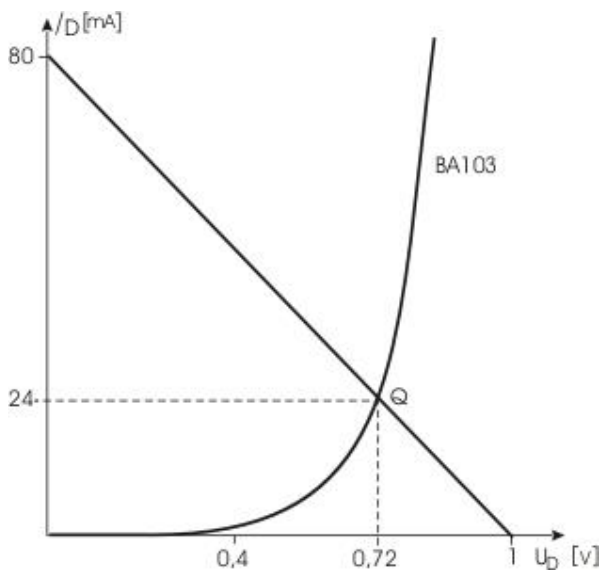
Analitički izraz za U- I karakteristiku poluprovodničke diode:

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{U_D}{mU_T}} - 1 \right) \dots\dots\dots 9.2.1$$

Gdje je

$I_0 \equiv I_S$ -struja inverzno polarisane diode.

Oblik I-U karakteristike ima standardni poznati oblik. Dijagram strujno-naponske karakteristike (I-U) diode, radna prava i statička radna tačka Q ili M, predstavljeni su na 59.



Sl. 59 Oblik I-U karakteristike diode, položaj radne tačke

77) Izračunati statički i dinamički otpor poluprovodničke diode, ako su dati struja i napon diode u statičkoj radnoj tački diode (SRT obično označavamo sa M ili Q):

$$I_D = 20\mu A \equiv I_{DM} = I_{DQ} \quad \text{i} \quad U_D = 0,1V \equiv U_{DM} = U_{DQ}$$

Rješenje:

Iz izraza za strujno naponsku karakteristiku pp diode možemo izračunati struju kroz diodu u radnoj tački:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$I_D = I_0 \left(e^{\frac{U_D}{U_T}} - 1 \right) = I_{DQ}$$

Gdje je

$$U_T = \frac{kT}{q} = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/k} \cdot (273 + 25)^0 \text{ K}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 0,025 \text{ V}$$

$$\text{Količnik } \frac{U_D}{U_T} = \frac{0,1 \text{ V}}{0,025 \text{ V}} = 4$$

Na osnovu ovih rezultata, i izraza za struju diode, dobijemo vrijednost struje diode u SRT M ili Q:

$$I_D = I_0 \left(e^{\frac{U_D}{U_T}} - 1 \right) = 20 \cdot 10^{-6} \text{ A} (2,718^4 - 1) = 1071 \mu\text{A} = 1,071 \text{ mA} \equiv I_{DQ}$$

Po definiciji radna tačka se dobije u presjeku radne prave i U-I karakteristike diode, čije koordinate su :

$$Q(U_{DQ}, I_{DQ}) = Q(1,071 \text{ mA}; 0,1 \text{ V}) \equiv M(U_{DM}, I_{DM})$$

Statički otpor definisan je količnikom napona i struje u statičkoj radnoj tački, tj.:

$$R_S = \frac{U_{DQ}}{I_{DQ}} = \frac{U_{DM}}{I_{DM}} = \frac{0,1 \text{ V}}{1,071 \text{ mA}} = 93,37 \Omega$$

Dinamički otpor ili diferencijalni otpor za naizmjeničnu struju definišemo izrazom:

$$R_d = \frac{\Delta U_{DQ}}{\Delta I_{DQ}} = \frac{\Delta U_{DM}}{\Delta I_{DM}} = \frac{dU_D}{dI_D} = \frac{1}{\frac{dI_D}{dU_D}} = \frac{U_T}{I_0} \cdot e^{-U_D/U_T}$$

Do izvoda izraza za diferencijalni otpor diode, polazimo od zavisnosti struje diode od napona na diodi $I_D = f(U_D)$, koju možemo napisati u razvijenom obliku:

$$I_D = I_0 \left(e^{\frac{U_D}{U_T}} - 1 \right) = I_0 \cdot e^{\frac{U_D}{U_T}} - I_0$$

Na osnovu izvoda funkcije oblika

$$y = a \cdot e^{\frac{x}{b}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{1}{b} \cdot e^{\frac{x}{b}} = \frac{a}{b} \cdot e^{\frac{x}{b}}$$

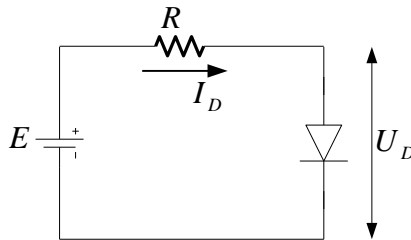
možemo izračunati prvi izvod ove struje diode po naponu:

$$\frac{dI_D}{dU_D} = I_0 \cdot \frac{1}{U_T} e^{\frac{U_D}{U_T}} \Rightarrow R_d \equiv r_d = \frac{1}{\frac{dI_D}{dU_D}} = \frac{U_T}{U_0} e^{-U_D/U_T}$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u dobiveni izraz, dobijemo vrijednost dinamičkog otpora:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$R_d \equiv r_d = \frac{U_T}{I_0} \cdot e^{-U_D/U_T} = \frac{0,025V}{20 \cdot 10^{-6} A} (2,718^4) = 0,00125 \cdot 10^6 \cdot 54,5755^{-1} = \\ = 0,000022904 \cdot 10^6 \Omega \approx 22,9 \Omega$$



Sl. 60. Dioda u električnom kolu

78) Izračunati struju i napon kroz diodu u kolu na Sl. 60. ako je zadano:

$I_0 = 10 \mu A$, $R = 5 k\Omega$, $E = 10 V$ za: a) direktnu polarizaciju, b) inverznu polarizaciju.

Rješenje:

a) U propusnom smjeru dioda ima mali otpor, $R_{D0} \approx 0 \Omega$, pa struja u kolu zavisi samo od otpora R , na osnovu čega možemo napisati naponsku jednačinu u kolu:

$$E = R \cdot I_D + R_{D0} \cdot I_D \Rightarrow I_D = \frac{E}{R + R_{D0}} \approx \frac{E}{R}$$

jer je $R \gg R_{D0}$, pa je:

$$I_D \approx \frac{E}{R} = \frac{10V}{5 \cdot 10^3 \Omega} = 2 \text{ mA}$$

Napon U_D možemo izračunati iz relacije:

$$I_D = I_0 \left(e^{\frac{U_D}{U_T}} - 1 \right) \Rightarrow \frac{I_D}{I_0} = e^{\frac{U_D}{U_T}} - 1$$

čijim logaritmiranjem dobijemo:

$$\frac{I_D}{I_0} = e^{\frac{U_D}{U_T}} - 1 \cdot \ln \Rightarrow \frac{U_D}{U_T} \cdot \ln e = \ln \left(\frac{I_D}{I_0} + 1 \right) \Rightarrow U_D = U_T \ln \left(\frac{I_D}{I_0} + 1 \right)$$

Uvrštavanjem datih vrijednosti, za napon na diodi dobijemo:

$$\begin{aligned} U_D &= U_T \ln \left(\frac{I_D}{I_0} + 1 \right) = 0,025V \cdot \ln \left(\frac{2mA}{10\mu A} + 1 \right) = \\ &= 0,025V \cdot \ln(0,2 \cdot 10^3 + 0,001 \cdot 10^3) = 0,025V \cdot \ln(0,201 \cdot 10^3) = \\ &= 0,025V \cdot \ln 201 = 0,025V \cdot 5,3033 = 0,1325V \end{aligned}$$

$U_D = 0,1325V$ za direktnu polarizaciju.

b) Za inverznu polarizaciju je $e^{\frac{U_D}{U_T}} \gg 1$, pa je izraz za struju diode dat sa:

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$I_D \approx I_0 \cdot e^{\frac{U_D}{U_T}}$$

Za $U_D < 0$ je $e^{\frac{-U_D}{U_T}} \ll 1$, pa je struja $I_D \approx I_0 \cdot e^{\frac{-U_D}{U_T}} \approx -I_0$

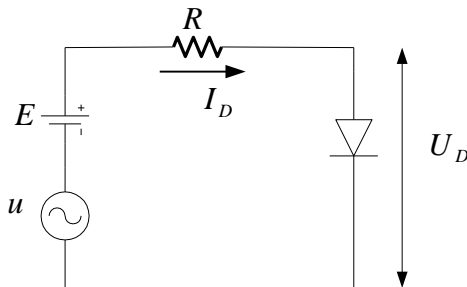
Na osnovu početne naponske jednačine za posmatrano kolo dobijemo:

$$E = R \cdot I_D + R_{D0} \cdot I_D \Rightarrow E = R \cdot I_D + U_D \Rightarrow U_D = E - R \cdot I_D$$

$$U_D = E - R \cdot I_D = 10V - 5 \cdot 10^3 \Omega \cdot (-10 \cdot 10^{-6} A) = 10V + 5 \cdot 10^{-3} V = 10,005V$$

$$-U_D \approx 10V \Rightarrow U_D \approx -10V$$

- 79)** U kolu sa diodom čija je inverzna struja $I_0 = 10 \mu A$ na $T = 25^0 C$, djeluje naizmjenični napon oblika $u = U_{Dm} \sin \omega t$ i istosmjerni napon $E=10V$. Vrijednost opora u kolu je $R = 5 k\Omega$. Odrediti naizmjeničnu komponentu napona na diodi u kolu na Sl. 61..



Sl. 61. šeme zadatka 71

Rješenje:

Iz naponske jednačine za posmatrano kolo dobijemo:

$$E = R \cdot I_D + R_{D0} \cdot I_D \quad \text{za } R \gg R_{D0} \Rightarrow I_D \approx \frac{E}{R} = 2 \text{ mA}$$

propusnom smjeru dioda ima mali otpor Sl.61.

$$U_D = U_T \ln\left(\frac{I_D}{I_0} + 1\right) = 0,025 \text{ V} \ln\left(\frac{2 \text{ mA}}{10 \mu\text{A}} + 1\right) = 0,025 \text{ V} \ln 201 =$$

$$= 0,025 \text{ V} \cdot 5,303 = 0,13258 \text{ V}$$

Dinamički otpor diode je:

$$R_d \equiv r_d = \frac{U_T}{I_0} \cdot e^{-U_D/U_T} = \frac{0,025 \text{ V}}{10 \cdot 10^{-6} \text{ A}} (2,718^{-5,3}) = 0,0025 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{200,2} =$$

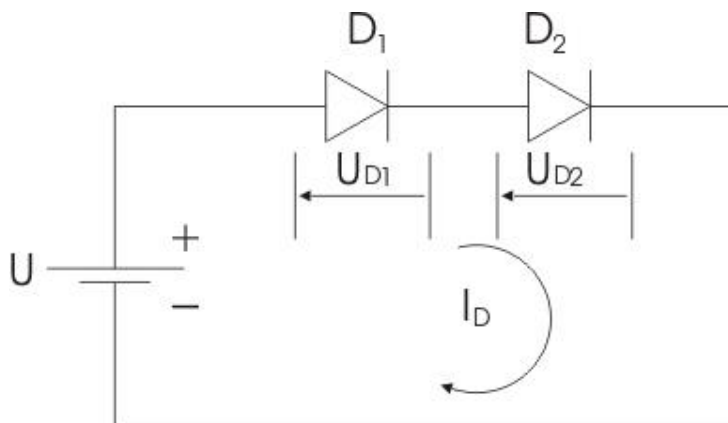
$$= 0,000012487 \cdot 10^6 = 12,487 \Omega$$

Naizmjenična komponenta napona na diodi definisana je slijedećim izrazom , koji se dobije primjenom Teveninovog teorema na posmatrano kolo:

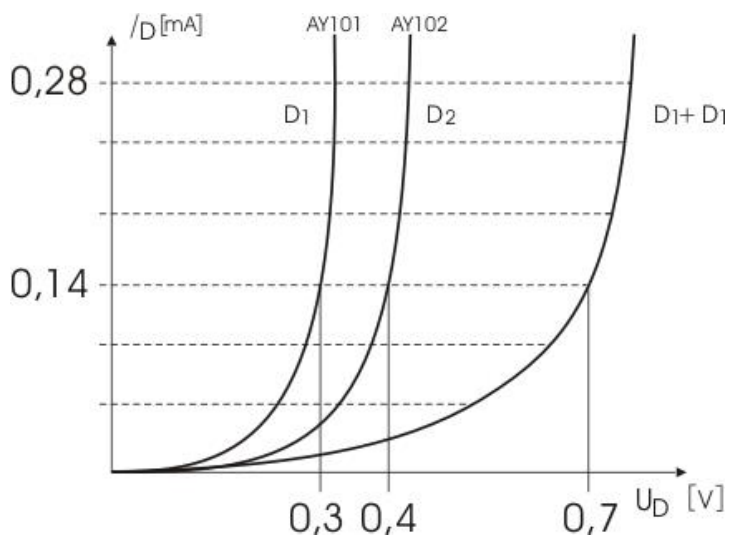
$$u_D = u \cdot \frac{R_{D0}}{R + R_{D0}} + 0 \cdot \frac{R}{R + R_{D0}} = u \cdot \frac{R_{D0}}{R + R_{D0}} = \frac{R_{D0}}{R + R_{D0}} \cdot U_{Dm} \sin \omega t .$$

- 80)** Dvije germanijumske diode D1 i D2 serijski su spojene na izvor napajanja $U = 0,7 \text{ V}$, Sl. 62. Grafički treba odrediti napone i struju dioda. Zadane su karakteristike dioda na Sl 63.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE



Sl. 62 Diode u serijskom spoju



Sl. 63. Karakteristika dioda

Rješenje

Zadatak se može riješiti određivanjem ekvivalentne karakteristike dioda D1 i D2. Budući da su diode spojene serijski, struja im je zajednička, pa se karakteristike „naponski” sabiraju.

Na karakteristici D1 + D2 određuje se struja I_D za napon $U = 0,7$ V, a zatim se za tu struju očitavaju naponi na karakteristikama D1 i D2, sl. 1.5.

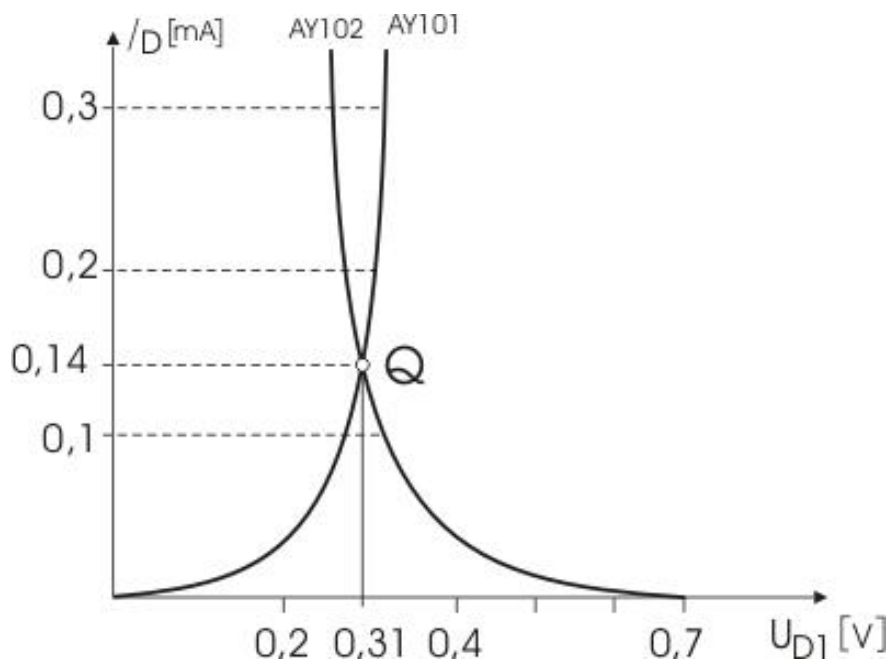
$$U_{D1} = 0,31 V$$

$$U_{D2} = 0,39 V$$

$$I_D = 0,14 A$$

$$U = U_{D1} + U_{D2} \dots\dots\dots 9.2.1$$

$$I_D = f(U_{D1}) \dots\dots\dots 9.2.2$$



Sl. 64

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

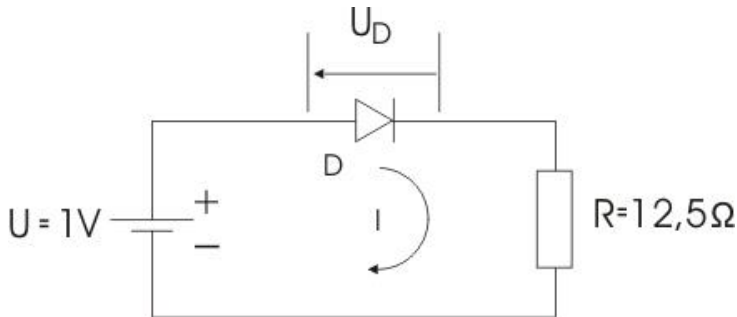
Drugi način:

Jednačine (9.2.1) i (9.2.2) prikazane su u koordinatnom sistemu

$I_D - U_{D1}$, Sl. 64. Sjecište Q je traženo rješenje.

81) Za strujno kolo na slici 65. treba odrediti struju I te napon U_D na diodi primjenom:

- analitičke metode;
- grafičke metode.



Sl. 65.

Zadana je karakteristika silicijumske diode BA 103, Sl. 1.14.

Rješenje

- Odnos između napona na diodi i struje kroz diodu dat je relacijom (9.2.3.):

$$I_D = I_0 \left(e^{\frac{U_D}{U_T}} - 1 \right) \dots\dots\dots 9.2.3.$$

$$U_D = U - R \cdot I \dots\dots\dots 9.2.4.$$

Potrebno je izračunati struju I i napon na diodi U_D .

$$U_T = 26 \text{ mV} \quad I_S = I_0 = 10 \text{ } \mu\text{A}$$

Iz relacije (9.2.4.) dobijemo izraz za napon U_D :

$$U_D = U - IR \dots\dots\dots 9.2.5.$$

Kad izraz (9.2.5.) uvrstimo u izraz (9.2.3.) dobijemo sledeći izraz za struju diode:

$$I = I_S \left(e^{\frac{U-IR}{U_T}} - 1 \right) \dots\dots\dots 9.2.6$$

koji predstavlja transcendentnu jednačinu, koja se može riješiti samo približno, npr. primjenom iteracionog postupka. Najčešće se primjenjuje Newton-Raphsonov iteracioni postupak, Sl. 66.

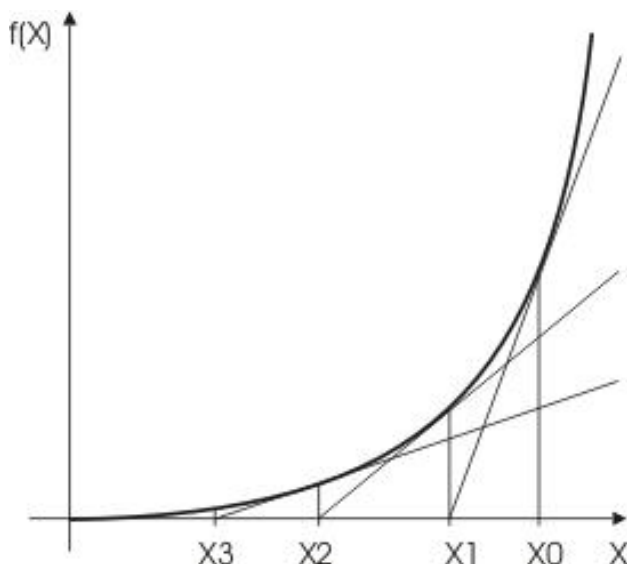
Ako je x_0 približna vrijednost korijena jednačine $f(x) = 0$, tad se kao tačnija približna vrijednost uzima x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \dots\dots\dots 9.2.7$$

Sledeća približna vrijednost dobije se ako se x_0 zamijeni sa x_1 , x_1 sa x_2 itd.

Geometrijski, Newton-Raphsonova metoda

znači zamjenu grafika funkcije $f(x)$ tangentom u tački x_0, x_1, x_2, \dots



Sl. 66. Ilustracija Newton-Raphsonovog metoda.

Vidimo da bi rješavanje relacije (9.2.5), odnosno (9.2.6.) na upravo opisan način bilo prilično dugotrajno i teško, stoga se njezino rješenje može potražiti na jednostavniji način-grafičkim postupkom, Sl. 67.

Iz relacije (9.2.5)

$$U_D = U - IR$$

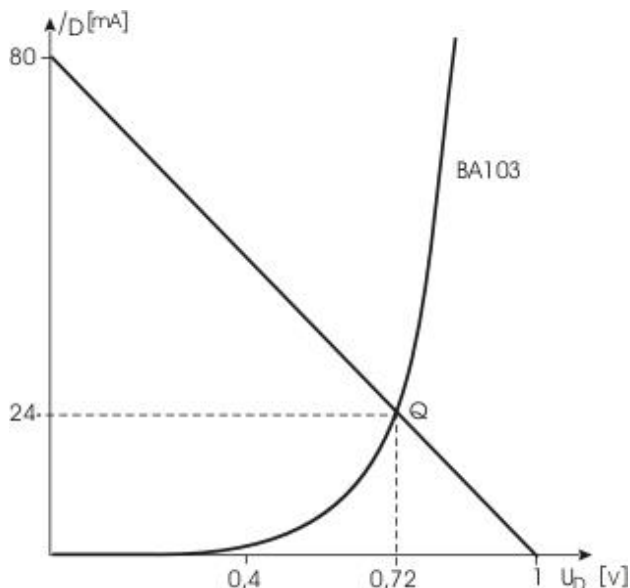
$$I = -\frac{U_D}{R} + \frac{U}{R}$$

Koja predstavlja jednačinu pravca, možemo nacrtati radnu pravu za :

$$U_D = 0 \Rightarrow I = \frac{U}{R} = \frac{1}{12,5\Omega} = 80[mA]$$

$$I = 0 \Rightarrow U_D = U = 1[V]$$

Sa dijagrama na Sl. 67. grafički možemo odrediti napon na diodi i struju kroz diodu:

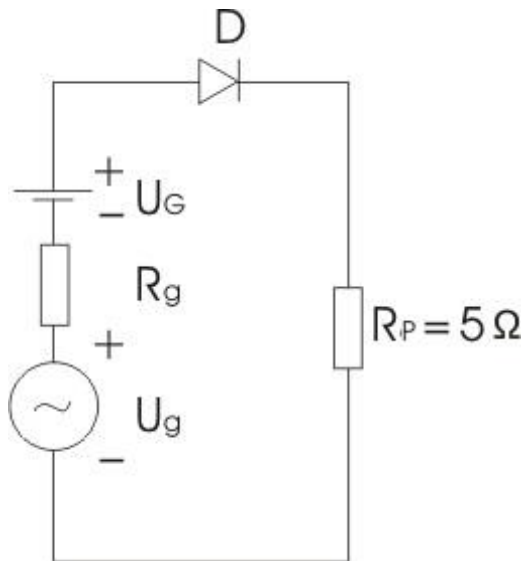


Sl. 67. Uz grafičko određivanje struje I te napon a U_D na diodi. $Q(0,72V, 24mA)$

- 82) Za sklop na slici Sl. 68.. potrebno je odrediti statičku radnu točku Q, granične pomake radnog pravca te efektivnu vrijednost naizmjeničnog napona na potrošaču $R_p = 5\Omega$. Data je karakteristika silicijumske

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

diode BA103, Sl.9.2.10. $U_G = 1V$, $u_g = U_{gm} \cdot \sin \omega t$,
 $U_{gm} = 0,1V$, $R_g = 5 \Omega$



Sl. 68.

Rješenje:

Statički radni pravac određen je jednačinom:

$$U_G = U_D + I(R_P + R_D)$$

$$U_G = U_D + I(R_P + R_D) \Rightarrow 1V = U_D + I(5\Omega + 5\Omega),$$

$$1V = U_D + I \cdot 10\Omega \tag{1}$$

Tačke presjeka radnog pravca sa koordinatnim osima dobijemo za:

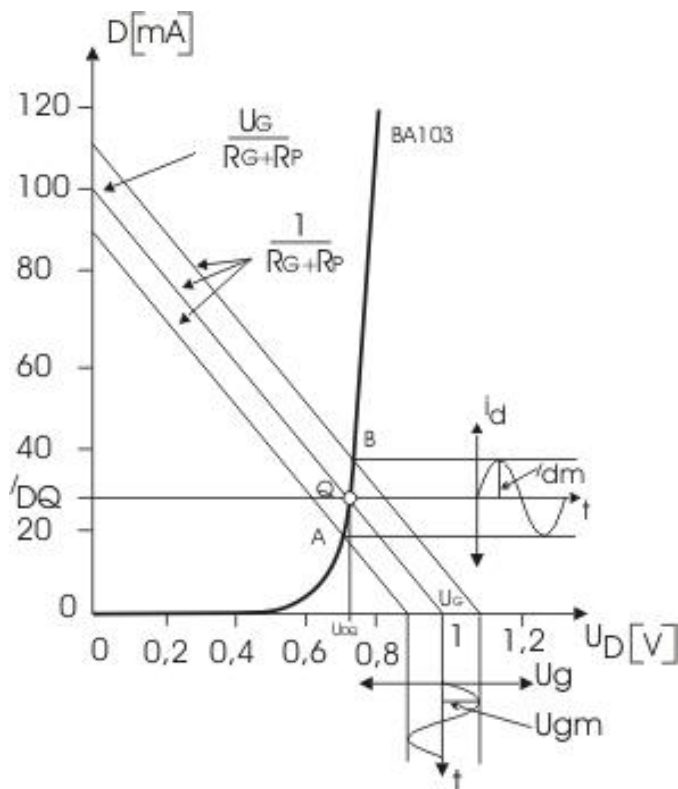
$$U_D = 0 \text{ struja iznosi } I = \frac{U_G}{R_p + R_g} = 100[\text{mA}]$$

$$I = 0 \text{ , napon } U_D \text{ iznosi } U_D = U_G = 1[\text{V}].$$

Statička radna tačka Q nalazi se u **presjeku radnog pravca i karakteristike diode**, Sl.9.2.10. Hod radne tačke u dinamičkim uslovima određen je promjenama napona u_g . Granični su pomaci definisani vrijednostima $U_G - U_{gm}$ i $U_G + U_{gm}$.

Dio karakteristike između tačaka A i B može se smatrati linearnim (rad sklopa u režimu malih signala), a to znači da se dioda može nadomjestiti otporom čiji je iznos jednak omjeru prirasta napona i struje u tom radnom području:

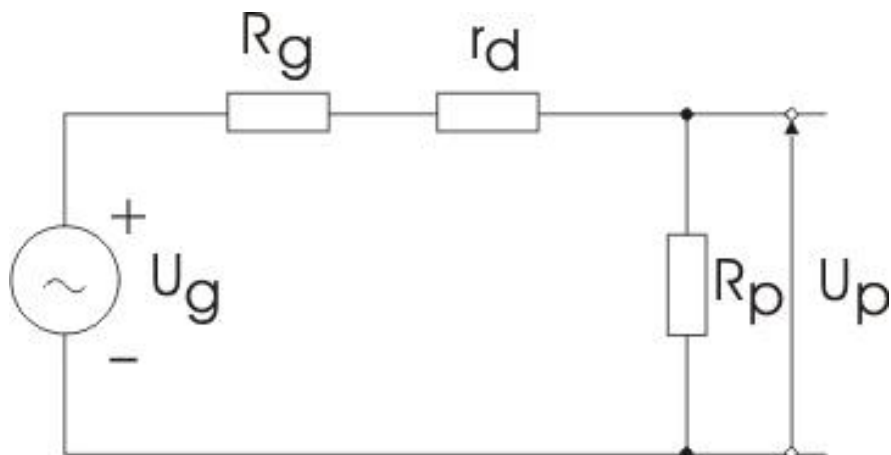
ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE



Sl. 69. Grafički prikaz radnih pravaca i određivanje efektivne vrijednosti naizmjenične struje kroz potrošač

$$r_d = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{0,04V}{17mA}$$

Efektivna vrijednost naizmjenične struje kroz potrošač može se odrediti iz grafa na slici 69 ili analitičkim postupkom prema ekvivalentnoj šemi sklopu u dinamičkim uslovima.



Sl. 70. Ekvivalentna šema sklopa u dinamičkim uslovima

Efektivna vrijednost naizmjeničnog napona na potrošaču iznosi:

$$I_{ef} = \frac{U_g}{R_g + r_d + R_p} = \frac{0,1/\sqrt{2}}{5 + 2,35 + 5} = 5,73mA$$

8.3 STATIČKA I DINAMIČKA ANALIZA POJAČAVAČA U SPOJU SA ZAJEDNIČKIM EMITEROM

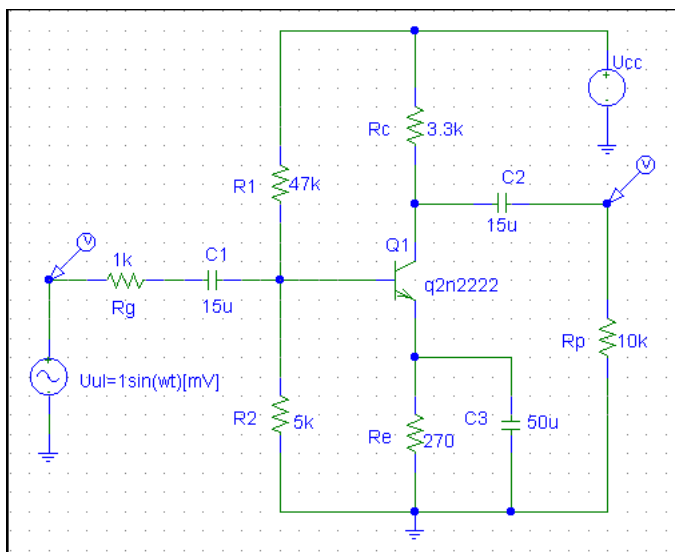
Za pojačavač u spoju sa ZE sa podacima na Sl 1. nacrtati šemu za simulaciju u PSpice programu¹ i provesti postupak simulacije rada

¹ Detaljnije pogledati ELN II M. Živanov, i Uputstvo za lab. vježbe na PSPICE ETF Tz i Bl -grupa autora i Laboratorijske vježbe, VŠ - SF Dobož, Savo Kalabić

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

pojačavača, na osnovu čega se dobiju rezultati dati na Sl.2., a naponski i dijagrami struje na Sl.71. i Sl.72. respektivno.

Šema spoja :

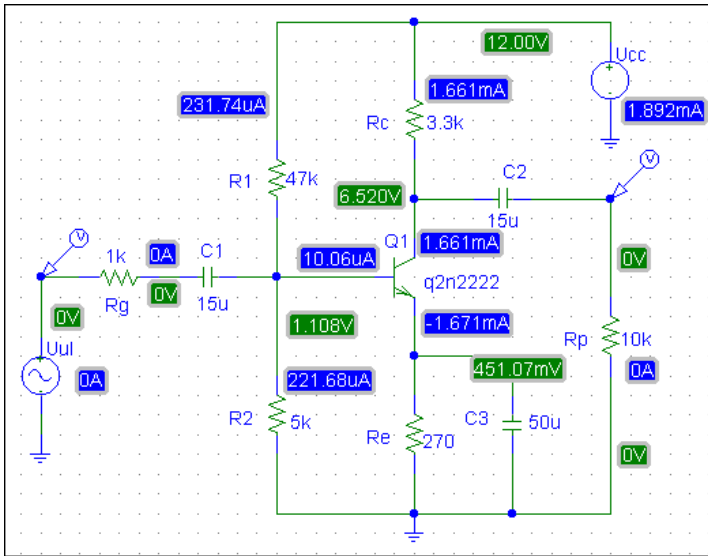


Sl. 71. Pojačavač u spoju sa ZE

Analiza uz pomoć programa Schematics :

Nacrtati šemu pojačavača pomoću programa Schematics i pokrenuti simulaciju, a što je prikazano na Sl.ma 1,2 , 3 i 4

Na šemi se vidi veza između elemenata u kolu i vrijednosti napona i struja u karakterističnim tačkama sklopa, a na Sl.3 i 4. se vide naponski i strujni oblici u naznačenim tačkama na ulazu i izlazu sklopa, na kojima se vidi pojačanje napona i struje, kao i pomeranje faze izlaznog napona i struje za 180 stepeni u odnosu na ulazne signale. Dakle, pojačavač u spoju sa ZE obrće fazu signala.



Sl. 72. Pojačavač u spoju sa ZE.

Prikaz rezultata simulacije rada

Sa šeme možemo direktno očitati statičku struju baze² i kolektora , a napon između kolektora i emitera možemo odrediti jednostavnim oduzimanjem napona na kolektoru i emiteru

² Za definiciju $h_{ie} = \frac{U_T}{I_{BQ}}$, koji predstavlja ulazni

otpor tranzistora uz kratko spojen izlaz, detaljnije informacije mogu se naći u ELN I, dr. P. Biljanović, ETF Zgb, relacija (9.14) i (9.15). Na osnovu relacije (9.14)

$$\frac{1}{r_{b'e'}} = \frac{dI_B}{dU_{B'E'}} = \frac{I_S}{\beta} \cdot \frac{1}{U_T} \cdot e^{U_{B'E'}/U_T} = \frac{I_B}{U_T} \Rightarrow$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

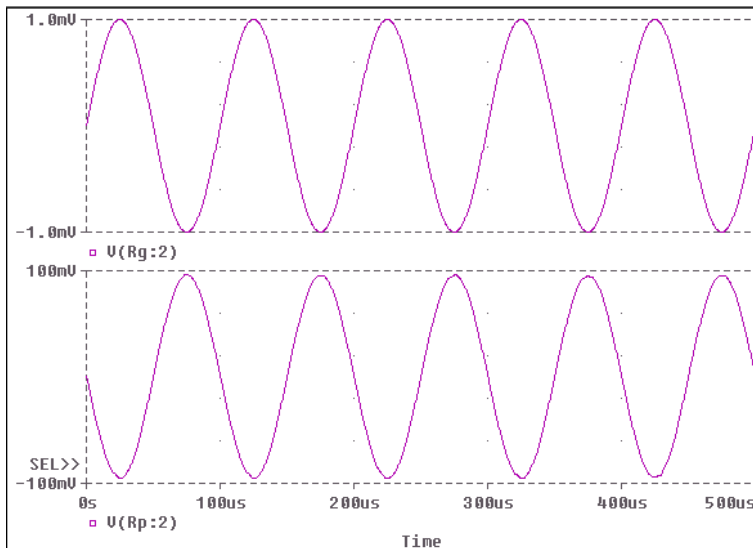
$$I_{BQ} = 10,06[\mu A], \quad U_{BEQ} = U_B - U_E = 1,1 - 0,45 = 0,65[V] ,$$

$$I_{CQ} = 1,661[mA], \quad \beta = \frac{I_{CQ}}{I_{BQ}} = \frac{1,66 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}} = 166$$

$$U_{CEQ} = U_C - U_E = 6,52 - 0,451 = 6,069[V] ,$$

$$h_{ie} = \frac{U_T}{I_{BQ}} = \frac{0,025V}{10 \cdot 10^{-6} A} = 2500[\Omega]$$

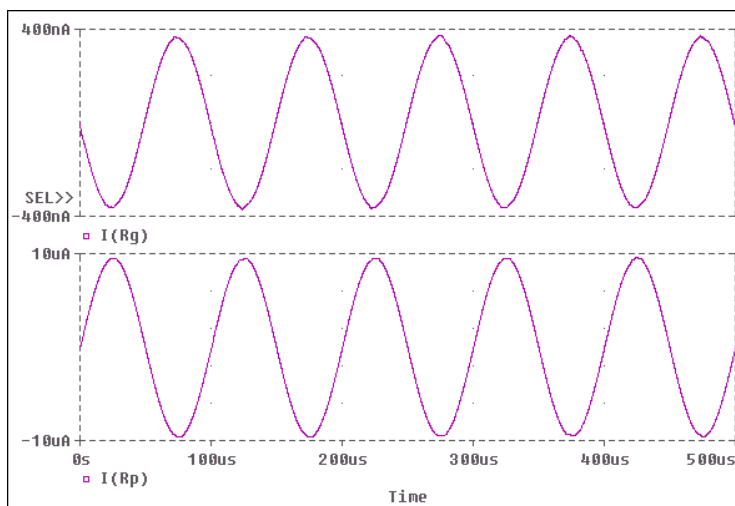
$$Q(I_{BQ}, I_{CQ}, U_{CEQ}) = Q(10\mu A, 1,66mA, 6,069V)$$



Sl. 73. Talasni oblik ulaznog i izlaznog napona

$$\frac{1}{r_{b'e}} = \frac{I_{BQ}}{U_T} \Rightarrow r_{b'e} = h_{ie} = \frac{U_T}{I_{BQ}} \quad (9.15). \text{ gdje je } r_{b'e} \text{ dinamički otpor}$$

diode (B-E) za mali naizmjenični signal, koji djeluje između interne baze i internog emitera \square



Sl. 74. Talasni oblik ulazne i izlazne struje

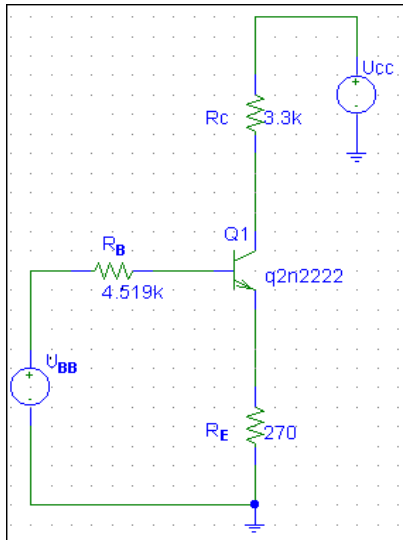
Iz talasnih oblika napona i struja može se odrediti naponsko i strujno pojačanje pojačavača u spoju sa zajedničkim emiterom. Pojačanje ćemo odrediti tako što ćemo, uz pomoć programa PROBE očitati amplitude napona i struja koji djeluju u pojačavaču :

$$A_V = \frac{U_{izm}}{U_{ulm}} = -97 \quad A_I = \frac{I_{izm}}{I_{ulm}} = -25$$

8.5 ANALITIČKI POSTUPAK. ODREĐIVANJE STATIČKE RADNE TAČKE

Za istosmjerni režim rada pojačavača, tj. kad na ulazu pojačavača ne djeluje naizmjenični napon, svi kondenzatori su u prekidu, na osnovu čega crtamo ekvivalentnu šemu pojačavača za istosmjerni režim rada pojačavača (Sl. 5.)

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE



Sl. 75. Ekvivalentna šema pojačavača za istosmjerni režim rada pojačavača.

Iz Schematics-a očitamo vrijednost za $U_{BEQ} = 0,657[V]$ i $\beta = \frac{I_C}{I_B} = 166,1$

a zatim izračunamo Thevenenov otpor $R_T = R_B$ i Thevenenov napon

$U_T = U_{BB}$ na ulazom dijelu pojačavača :

$$R_T = R_B = R_1 \parallel R_2 = \frac{47k \cdot 5k}{47k + 5k} = 4,519[k\Omega]$$

$$U_T = U_{BB} = U_{CC} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1,153[V]$$

Za izlazno kolo pojačavača možemo napisati naponsku jednačinu ,
uzimajući da je veza između struje u kolu emitera i baze

: $I_{EQ} = (1 + \beta)I_{BQ}$, odakle iz dobijene jednačine možemo odrediti I_{BQ} :

$$I_{BQ} \cdot R_B + I_{EQ} \cdot R_E = U_{BB} - U_{BEQ}$$

$$I_{BQ} \cdot [R_B + (1 + \beta)R_E] = U_{BB} - U_{BEQ}$$

$$I_{BQ} = \frac{U_{BB} - U_{BEQ}}{R_B + (1 + \beta)R_E} = \frac{1,153 - 0,657}{4519 + (1 + 166,1) \cdot 270} = 10[\mu A]$$

$$I_{CQ} = \beta \cdot I_{BQ} = 166,1 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 1,66[mA]$$

$$h_{ie} = \frac{U_T}{I_{BQ}} = \frac{0,025V}{10 \cdot 10^{-6} A} = 2500[\Omega]$$

Za izlazno kolo pojačavača možemo napisati naponsku jednačinu :

$$U_{CC} = R_C \cdot I_{CQ} + U_{CEQ} + R_E \cdot I_{EQ} \qquad I_{EQ} = (1 + \beta)I_{BQ}$$

$$U_{CEQ} = U_{CC} - R_C I_{CQ} - R_E (1 + \beta)I_{BQ}$$

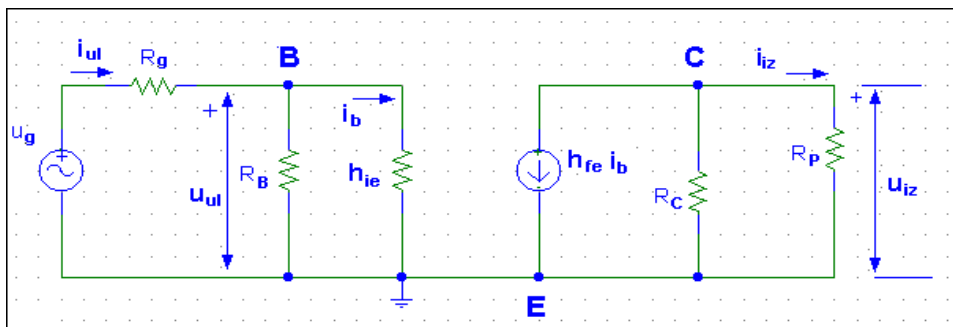
$$U_{CEQ} = 12 - 5,93 = 6,07[V]$$

Prema tome , radna tačka je određena :

$$Q(I_{BQ}, I_{CQ}, U_{CEQ}) = Q(10\mu A, 1,66mA, 6,07V)$$

8.6 DINAMIČKA ANALIZA POJAČAVAČA U SPOJU SA ZAJEDNIČKIM EMITEROM

Kad na ulazu pojačavača djeluje i naizmjenični signal koji pojačavamo, svi kondenzatori su u kratkom spoju, za koji uslov možemo nacrtati šemu pojačavača za naizmjenični signal i tranzistor zamijenimo ekvivalentnom šemom na bazi hibridnih (h) parametara, dobijemo ekvivalentnu šemu pojačavača kao na Sl. 76., na osnovu koje možemo izračunati karakteristične parametre pojačavača u spoju sa ZE, R_{ul} , R_{izl} , A_u , A_I .



Sl. 76.

$$R_{ul} = \frac{u_{ul}}{i_{ul}} = \frac{i_{ul} \cdot (R_B \parallel h_{ie})}{i_{ul}} = R_B \parallel h_{ie} = \frac{R_B \cdot h_{ie}}{R_B + h_{ie}} = 1609,5[\Omega] ,$$

$$R_{iz} = R_C = 3,3[k\Omega] ,$$

$$A_V = \frac{u_{iz}}{u_{ul}} = \frac{-h_{fe} \cdot (R_C \parallel R_P)}{h_{ie}} = -164,85 ,$$

$$A_{Vg} = \frac{u_{iz}}{u_g} = \frac{i_{iz} \cdot R_P}{i_{ul} \cdot (R_g + R_{ul})} = A_I \cdot \frac{R_P}{R_g + R_{ul}} = -101,6 ,$$

$$u_{iz} = -h_{fe} \cdot i_b \cdot (R_C \parallel R_P) \quad , \quad u_{ul} = i_b \cdot h_{ie} \quad ,$$

$$A_I = \frac{i_{iz}}{i_{ul}} = \frac{\frac{u_{iz}}{R_P}}{\frac{u_{ul}}{R_{ul}}} = \frac{u_{iz}}{u_{ul}} \cdot \frac{R_{ul}}{R_P} = A_V \cdot \frac{R_{ul}}{R_P} = -26,53 \quad ,$$

ZAKLJUČAK :

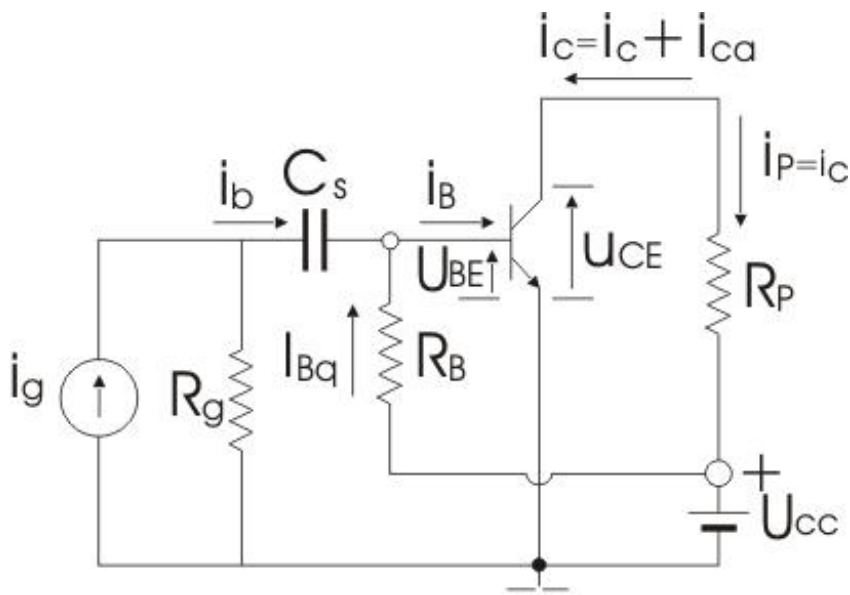
Pojačavač u spoju sa zajedničkim emiterom najčešće se primjenjuje jer pojačava i napon i struju, odnosno snagu signala, ali izlazni signal je fazno pomjeren za 180° u odnosu na ulazni signal, odnosno ulazni i izlazni napon su u protivfazi . Zbog toga se u praksi kaskadni spojevi izvode sa parnim brojem pojačavačkih stepena u spoju sa zajedničkim emiterom da bismo na izlazu dobili signal koji je u fazi sa ulaznim naponom.

Pojačanje je dosta veliko i zato se pojačavači u spoju sa zajedničkim emiterom najčešće primjenjuju, jer već sa dva stepena pojačanja koji imaju pojačanje od približno 100 puta, možemo postići pojačanje napona od:

$$A_V = A_{V1} \cdot A_{V2} = 100 \cdot 100 = 10000 = 10^4 \text{ puta} \quad \text{ili}$$

$$A_V [dB] = 20 \log |A_V| = 80 [dB]$$

Za pojačavač u spoju sa ZE, na ulaz se dovodi naizmjenični signal amplitude $I_{bm} = 20 \mu A$, koja je data izrazom:



$i_B = I_{cm} \sin \omega t + I_{CQ} = 2\text{mA} \cdot \sin \omega t + 6\text{mA}$, u kolu kolektora se dobije struja kolektora $i_C = I_{cm} \sin \omega t + I_{CQ} = 2\text{mA} \cdot \sin \omega t + 6\text{mA}$. Vrijednosti amplituda ulaznog i izlaznog napona su: $U_{cem} = 1,6\text{V}$, $U_{bem} = 0,04\text{V}$. Vrijednosti istosmjernih struja u kolu baze i kolektora u radnoj tački Q date su u izrazima za struje. Sl. 75.

Izračunati strujno, naponsko i pojačanje snage.

Rješenje:

Pojačavač u spoju sa ZE obrće fazu ulaznog signala, a to znači da je izlani signal napon ili struja suprotnog predznaka od ulaznog signala, zbog čega je strujno i naponsko pojačanje negativnog predznaka.

Strujno pojačanje definiše se kao količnik izlazne (kolektorske) i ulazne (bazne) struje:

$$A_i = \frac{i_{izl}}{i_{ul}} = \frac{i_p}{i_c} = -\frac{i_c}{i_b} = -\frac{I_{cm}}{I_{bm}} = -\frac{2 \cdot 10^{-3} A}{2 \cdot 10^{-6} A} = -100$$

S obzirom da je pojačanje negativnog predznaka, a po iznosu dosta veće od jedinice, zaključujemo da pojačavač u spoju sa ZE pojačava ulazni signal i obrće njegovu fazu, pomjera fazu za 180 stepeni (odnosno π).

Struja $i_p = -i_c$ je struja koju pojačavač daje priključenom potrošaču. Taj potrošač je otpornik R_p . Za taj otpornik pojačavač je generator, pa je prirodno da struja $i_p = -i_c$ teče u potrošač.

Naponsko pojačanje definiše se kao količnik izlaznog i ulaznog napona:

$$A_u = \frac{u_{izl}}{u_{ul}} = \frac{u_{ce}}{u_{be}} = -\frac{U_{cem}}{U_{bem}} = -\frac{1,6V}{0,04V} = -40$$

Vidimo da pojačavač u spoju sa ZE pojačava signal i ponaponu i ujedno vrši obrtanje faze signala.

Pojačanje snage definiše se kao količnik izlazne i ulazne snage signala ili kao proizvod pojačanja naponskog i strujnog signala:

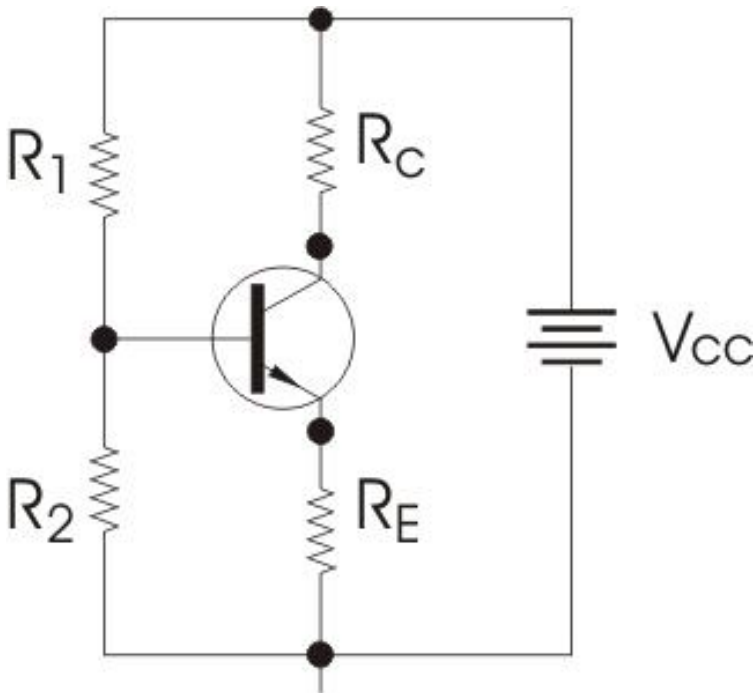
$$A_p = A_u \cdot A_i = A_u = (-40) \cdot (-100) = 4000$$

Vidimo da pojačavač značajno pojačava signal i po snazi, ali se u praksi preventivno koristi kao pojačavač struje.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

2. Za strujno kolo sa BJT tranzistorom prema slici poznato je $V_{CC} = 12$ V, $\beta = 100$, $V_{BE} = 0.7$ V, $R_C = 200$ Ω , $V_{R_2} = 8$ V. Izračunati:

- napon na emiteru
- maksimalnu moguću struju kolektora
- struju baze za radnu točku u kojoj je napon kolektor –emiter 2 V.
- kolika je minimalna struja baze pri kojoj bi tranzistor mogao raditi kao uključena sklopka
- struju kolektora ako je $V_{R_2} = 0,3$ V.



Sl. 77.

Rješenja:

a) $V_{RE} = V_{R2} - V_{BE} = 8 - 0.7 = 7.3 \text{ V}$

b)

$$(V_{RC})_{\max} = V_{CC} - V_{CE} - V_{RE} = 12 - 0 - 7.3 = 4.7 \text{ V}$$

$$(I_C)_{\max} = \frac{(V_{RC})_{\max}}{R_C} = \frac{4.7}{200} = 23.5 \text{ mA}$$

c)

$$V_{RC} = V_{CC} - V_{CE} - V_{RE} = 12 - 2 - 7.3 = 2.7 \text{ V}$$

$$I_C = \frac{V_{RC}}{R_C} = \frac{2.7}{200} = 13.5 \text{ mA}$$

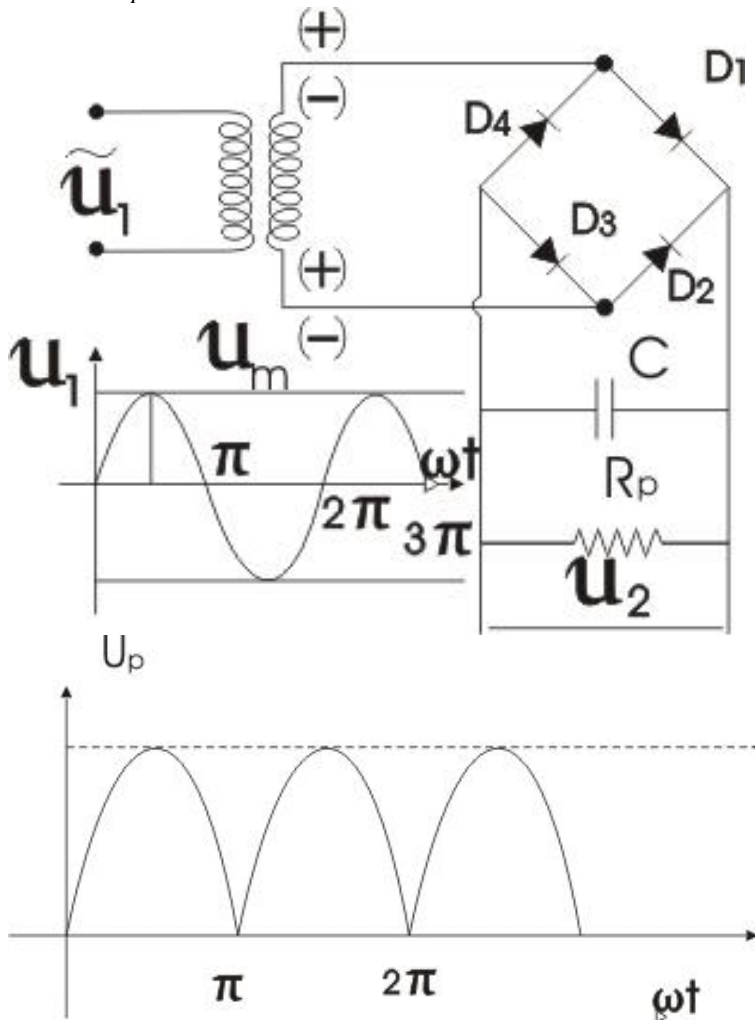
$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{13.5 \text{ mA}}{100} = 135 \mu\text{A}$$

d) $(I_B)_{\min} = \frac{(I_C)_{\max}}{\beta} = \frac{23.5 \text{ mA}}{100} = 235 \mu\text{A}$

e) struja kolektora je 0 A, jer je $V_{BE} > V_{R2}$, pa je tranzistor u stanju zapiranja

9 ISPRAVLJAČI – ZADACI

83) Za ispravljač na slici , na čijem primaru je naizmjenični napon $u_1 = U_m \sin \omega t = 120V \cdot \sin \omega t$. Izračunati: srednju vrijednost istosmjernog napona iz Graetz-ovog spoja koji se dodaje na potrošaču $R_p = 5k\Omega$.



Sl. 78. Punotalasni ispravljač sa Grecovim spojem

- a) efektivnu vrijednost napona naizmjeničnih komponenti na $R_p = 5k\Omega$.
- b) efektivnu vrijednost napona naizmjeničnih komponenti na $R_p = 5k\Omega$, ako se otporu R_p veže paralelno kondenzator $C = 5\mu F$.
- c) Otpor $R_p = 5k\Omega$ i $C = 5\mu F$ čine jednostavan kapacitivni filter.

Rješenje

a) Razvojem ispravljenog napona $u_1 = U_m \sin \omega t = 120V \cdot \sin \omega t$,
 $u_2 = u_p$ u Fourier-ov red, dobijemo istosmjernu komponentu napona $U_{sr} = U_0$ na potrošaču i preostale naizmjenične komponente.

Srednja vrijednost jednosmjernog napona na potrošaču $R_p = 5k\Omega$ dobije se prema izrazu

$$U_{sr} = U_0 = 2 \cdot \frac{U_m}{\pi} = \frac{2 \cdot 120V}{3,14} = 76,433.$$

b)

Efektivnu vrijednost naizmjeničnih komponenti napona možemo izračunati na dva načina:

- prvi način je koristeći izraz za koeficijent pulzacije

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\gamma = \frac{U_n}{U_{sr}} = \sqrt{F-1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8}-1} = 0,48 \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{U_n}{U_{sr}} = 0,48 \Rightarrow$$

$$U_n = \gamma \cdot U_{sr} = \gamma \cdot \frac{2U_m}{\pi} = 0,48 \cdot 76,433 = 36,687$$

- drugi način je koristeći izraz za efektivnu vrijednost naizmjeničnih komponenti

$$U_{eff} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \dots}$$

ako uzmemo prve četiri harmonijske komponente dobijene razvojem u F. red ispravljenog napona (relacija 10.1.)

$$u_p = \frac{2U_m R_p}{\pi(R_i + R_p)} - \frac{4U_m R_p}{3\pi(R_i + R_p)} \cos 2\omega t - \\ - \frac{4U_m R_p}{15\pi(R_i + R_p)} \cos 4\omega t + \dots$$

(10.1)

Amplitude ovih harmonijskih komponenti podijelimo sa $\sqrt{2}$, jer je

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \text{ pa dobijemo:}$$

$$\frac{4U_m R_p}{3\pi(R_i + R_p)} = |za \quad R_i \ll R_p| \approx \frac{4U_m}{3\pi\sqrt{2}} = U_1$$

$$U_1 = \frac{4U_m}{3\pi\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 120V}{3 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{2}} = 36,03V,$$

$$U_2 = \frac{4U_m}{15\pi\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 120V}{15 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{2}} = 7,202V,$$

$$U_3 = \frac{4U_m}{35\pi\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 120V}{35 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{2}} = 3,087V,$$

$$U_4 = \frac{4U_m}{63\pi\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 120V}{63 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{2}} = 1,715V,$$

Kad ove rezultate kvadiramo , saberemo i nađemo drugi koren, dobijemo približno istu vrijednost kao u prethodnom postupku, jer je

$$U_n = \gamma \cdot U_{sr} \equiv U_{eff}$$

Konačno je :

$$U_{eff} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \dots} = 36,89V$$

Razlika u ova dva rezultata je zbog približnih (zaokruženih) rezultata.

Ako u izrazu za talasnost $\gamma = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} = 0,483$, tad dobijemo

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Da je $U_n = \gamma \cdot U_{sr} = 36,898V$.

c)

Ako $C = 5\mu F$ vežemo paralelno otporu $R_p = 5k\Omega$, tada je na osnovu izraza za koeficijent talasnosti dvostranog ispravljača kad je na izlazu uključen C-filtar.

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\pi}{2\sqrt{3}\omega CR_p} = \frac{\pi}{2\sqrt{3} \cdot 2\pi f \cdot CR_p} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3} \cdot f \cdot CR_p} = \\ &= \frac{0,02}{\sqrt{3}} \cdot 100\% = 0,0115 \cdot 100\% = 1,15\%\end{aligned}$$

Efektivna vrijednost naizmjeničnih komponenti napona na R_p u ovom slučaju je :

$$U_n = \gamma \cdot U_{sr} = 0,0115 \cdot 76,433 = 0,8789795 \approx 0,88 \text{ pri čemu } C \text{ i}$$

R_p čine kapacitivni filter, kojim se prigušuje napon

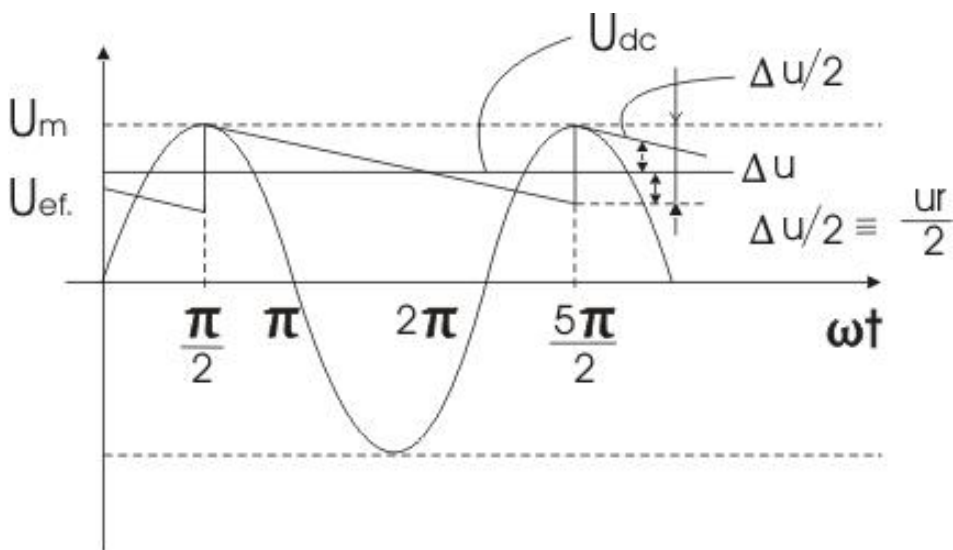
$$U_n = \gamma \cdot U_{sr} \equiv U_{eff} \text{ za približno } \frac{U_{n \text{ bez filtra}}}{U_{n \text{ sar C filtrom}}} = \frac{36,687}{0,88} = 41,68 \text{ puta.}$$

U praksi veoma često efektivnu vrijednost napona, koju stvaraju naizmjenične komponente na potrošaču nazivamo NAPON BRUJANJA. Taj napon treba biti što manji.

9.1 ANALIZA ISPRAVLJAČA SA KAPACITIVNIM FILTROM

Određivanje talasnosti kod ispravljača sa kapacitivnim filterom biće zasnovano na aproksimativnoj analizi napona na R_p . Ovdje ćemo uzeti da je pražnjenje kondenzatora linearno, a punjenje trenutno (Sl. 79.) i pri tome se pravi zanemaruje mala greška. Testerasti oblik napon odstupa od stvarnog oblika napona u pogledu sadržaja viših harmonika. U realnom slučaju dioda prestaje da vodi malo nešto iza maksimuma izlaznog napona kada je zadovoljen sledeći uslov:

$$i_D = i_p + i_C = U_m \left(\frac{1}{R} \sin \alpha_2 + \omega C \cos \alpha_2 \right) = 0$$



Sl. 79. Određivanje talasnosti kod ispravljača sa kapacitivnim filterom

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Sa Sl. 10.1.1. možemo pisati:

$$\begin{aligned}U &\cong U_m - \frac{1}{2}\Delta U = U_M - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta Q}{C} = U_m - \frac{1}{2} \cdot \frac{I \cdot t}{C} = \\&= U_m - \frac{I}{2Cf} = U_m - \frac{U}{2RCf} \Rightarrow\end{aligned}$$

Gdje je uvršteno $I = \frac{U}{R}$.

$$U \cong U_m - \frac{U}{2RCf} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}U_m &= U \left[1 + \frac{1}{2RCf} \right] = U \left[1 + \frac{1}{2RC \cdot \frac{\omega}{2\pi}} \right] = \\&= U \left[1 + \frac{\pi}{\omega CR} \right]\end{aligned}$$

Ako označimo potrošač sa $R = R_p$, tad prethodni izraz možemo pisati u obliku:

$$U_m \cong U \left[1 + \frac{\pi}{\omega CR} \right] = U \left[1 + \frac{\pi}{\omega CR_p} \right]$$

Odakle dobijemo da je

$$U_m \cong U \left[1 + \frac{\pi}{\omega CR_p} \right] \Rightarrow$$

$$U_m \cong U \left[1 + \frac{\pi}{\omega CR_p} \right] \Rightarrow$$
$$U \cong \frac{1}{1 + \frac{\pi}{\omega CR}} \quad (10.1.1)$$

Faktor talasnosti možemo izračunati ako je poznata efektivna vrijednost naizmjenične komponente napona na potrošaču. Prema (Sl. 10.1.1) imamo da je :

$$U_p = \frac{U}{2} - \frac{U}{T} \cdot t$$

pa je prema definiciji efektivne vrijednosti napona:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} i^2 d(\omega t)} \Rightarrow$$
$$U_{p\,eff} = \frac{1}{T} \int_0^T u_p^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{U}{2} - \frac{U}{T} t \right)^2 dt = \frac{U}{2\sqrt{3}}$$

Odakle je

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{U_{eff}}{U_{sr}} = \frac{U_n}{U_{sr}} = \frac{U_m/2}{U_{sr}} = \\ &= \frac{\sqrt{U_{eff}^2 - U_{sr}^2}}{U_{sr}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{U_m}{U_{sr}} - 1 \right) \end{aligned}$$

ili nakon zamjene

U_m/U_{sr} izvedenim izrazima, dobijemo za polutaladni ispravljač da koeficijent pulzacije iznosi :

$$\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{3}\omega CR} \tag{10.1.2}$$

Kod punotalasnog ispravljača je srednja vrijednost napona na R_p dva puta veća nego kod polutalasnog ispravljača pa će i talasnost biti toliko puta manja :

$$\gamma = \frac{\pi}{2\sqrt{3}\omega CR} \tag{10.1.3}$$

Faktor talasnosti može se izračunati ako je poznata efektivna vrijednost naizmjeničnih komponenti napona na potrošaču.

Ako se, kao u prethodnoj analizi, pretpostavi da napon na potrošaču ima oblik prikazan na (Sl. 10.1.1), to razlaganjem ovakvog talasnog oblika u

Fourier-ov red dobijamo više harmonike ispravljenog napona i uvid u sastav ispravljenog napona.

10. PRILOZI

PRILOG I

Za šire razumijevanje energije elektrona i poluprečnika orbita elektrona, energetskih nivoa i energetskih zona u atomu na bazi Borovog modela atoma, čitaoci mogu pročitati u ovom prilogu:

12.1 ENERGETSKI NIVOI I ENERGETSKE ZONE

Borov (N. Bohr 1913.) model atoma, pri $z = 1$ sastoji se od elektrona čije je naelektrisanje $-q$, efektivna masa $m_n = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ i jezgra u kome se nalazi proton naelektrisanja $+q$. Masa elektrona u mirovanju $m_0 = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Elektrostatička sila privlačenja između elektrona i protona, prema Kulonovom zakonu, data je sledećom jednačinom:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{q^2}{r^2}$$

gde je r - radijus orbite, ϵ_0 - dielektrična konstanta vakuma, ϵ_r - relativna dielektrična konstanta .

Elektron kruži po orbiti zbog jednakosti Kulonove sile i centrifugalne sile:

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = \frac{mv^2}{r} \dots\dots\dots 10.1.$$

Bor je pokazao da elektroni na stabilnim orbitama ne zrače energiju. Uveo je ugaoni moment elektrona. Iz kvantnog uslova uz Plankovu konstantu h , ugaoni moment elektrona glasi :

$$m_n v r = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar, \quad \text{gde je } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

odakle je

$$v = \frac{nh}{2\pi m_n r} \Rightarrow v^2 = \frac{n^2 h^2}{2\pi^2 m_n^2 r^2} \dots\dots\dots 11.2$$

Ako iz jednačine (11.2) izvučemo izraz za v^2 i izjednačimo ga sa izrazom za v^2 u izrazu (11.1), dobijemo:

$$\frac{n^2 h^2}{2\pi^2 m_n^2 r^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_n r} \Rightarrow \dots\dots\dots 11.3$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$r = \frac{n^2 \varepsilon_0 h^2}{q^2 \pi m_n} = n^2 \cdot \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,63^2 \cdot 10^{-34}}{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot \pi \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} \Rightarrow \dots\dots\dots 11.4)$$

$$r = n^2 \cdot 0,53 \cdot 10^{-10} [m]$$

Možemo izračunati radijuse za različite vrijednosti glavnog kvantnog broja n :

$$n = 1 \rightarrow r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} [m]$$

$$n = 2 \rightarrow r_2 = 2,12 \cdot 10^{-10} [m]$$

$$n = 3 \rightarrow r_3 = 4,8 \cdot 10^{-10} [m]$$

$$n = 4 \rightarrow r_4 = 8,5 \cdot 10^{-10} [m]$$

$$n = 5 \rightarrow r_5 = 13,3 \cdot 10^{-10} [m]$$

Izveli smo izraze za potencijalnu energiju elektrona :

$$E_p = \int_r^\infty \vec{F} d\vec{r} = - \int_\infty^r \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} dr = - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

odnosno ako se radi o vakumu, tj. ako u prethodnom izrazu uvrstimo za $\varepsilon_r = 1$, dobijemo za potencijalnu energiju elektrona u vakumu sledeći izraz:

$$E_p = - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \dots\dots\dots 11.5.$$

Potencijalna energija jednaka je radu koji je potrebno izvršiti da bi se elektron pomjerio sa svoje orbite na beskonačno rastojanje .

Iz uslova da elektron može ostati na orbiti jedino pod uslovom da je elektrostatička sila privlačenja elektrona i jezgra jednaka centrifugalnoj sili :

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

odakle se dobije izraz za kinetičku energiju:

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r r} \dots\dots\dots 11.6.$$

Ukupna energija elektrona na n -toj orbiti jednaka je sumi kinetičke E_k i potencijalne E_p energije , tj.

$$E = E_k + E_p$$

$$E = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon r} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon r} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon r} \dots\dots\dots 11.7$$

Ako u izraz (11.7) uvrstimo izraz za radijus orbite r u funkciji glavnog kvantnog broja n , dobijemo izraz za energiju elektrona u funkciji glavnog kvantnog broja n :

$$\begin{aligned} E &= -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{\pi q^2 m_n}{n^2 \epsilon_0 \epsilon_r h^2} = \\ &= -\frac{q^4 m_n}{8(\epsilon_0 \epsilon_r h)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$E = -\frac{q^4 m_n}{8(\epsilon_0 \epsilon_r h)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \dots\dots\dots 11.8$$

Ako uzmemo da je $\epsilon_r = 1$, tad izraz (14.8) možemo pisati u sledećem obliku :

$$E = -\frac{q^4 m_n}{8(\epsilon_0 h)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2} [eV] \dots\dots\dots 11.8.1$$

$$E = -\frac{13,6}{n^2} [eV] \dots\dots\dots 11.8.1.a$$

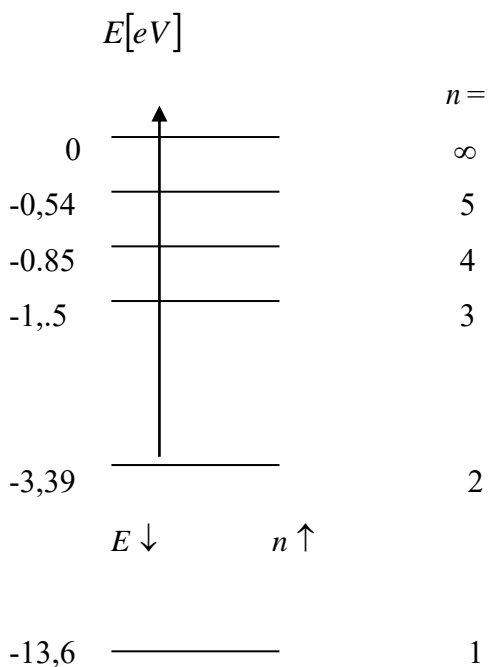
Ako u ovaj izraz uvrstimo vrijednosti za glavni kvantni broj $n = 1,2,3,4,5,\dots,10$, dobijemo vrijednosti energija po orbitama ¹ koji su dati u tabeli 1.1.

Tabela 1.

n	$E[eV]$
1	-13,6
2	-3,39
3	-1,51
4	-0,85
5	-0,54
10	-0,14

¹ Millman -Halkias, Integrated Electronics, 1972.g.

Vrijednost energija po orbitama, koje su date u tabeli, na Sl.11.1. prikazani su energetske nivou sa pripadajućim vrijednostima:



Sl. 79. Energetski (spektar) nivou stabilnih orbita (po orbitama).

Znak minus u relaciji (11.8) pokazuje da se ukupna energija elektrona smanjuje sa smanjivanjem poluprečnika orbite, iz čega možemo zaključiti da valentni elektroni, koji se nalaze u posljednjoj ljusci, imaju najveću energiju i mogu se uz dovođenje najmanjeg iznosa vanjske energije osloboditi veza sa jezgrom atoma. Minimalnu energiju ima elektron na najnižoj orbiti za koju je glavni kvantni broj $n=1$.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Na slici 79. prikazan je dijagram energetskeg spektra stabilnih orbita, sa koga vidimo da se sa povećanjem glavnog kvantnog broja n postavljaju bliže jedan drugom i na kraju za $n \rightarrow \infty$ formiraju praktično **neprekidan spektar** (jednačina 11.8)

Jedan od osnovnih postulata kvantne mehanike je da elektron koji se nalazi na stabilnoj orbiti ne zrači energiju. Međutim, pri prelasku sa jedne na drugu orbitu zrači ili apsorbuje kvant energije čija je vrijednost jednaka razlici energija u početnom i krajnjem položaju :

$$hf = E_1 - E_2 \dots\dots\dots 11.9$$

Ako u relaciju (1.*) uvrstimo izraz (1.8) za E_1 i E_2 dobijemo sledeći izraz za kvant energije :

$$hf = E_1 - E_2 = \frac{m_0 q^4 z^2}{8(h e_0 e_r)^2} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \dots\dots\dots 11.10$$

gdje je f -frekvencija emitovane ili apsorbovane energije fotona. Iz relacije (10.9) dobijemo tačnu vrijednost frekvencije spektra zračenja ili apsorpcije atoma vodonika. Ova relacija predstavlja prvu potvrdu kvantne teorije Borovog (N. Bohr) modela atoma o diskontinuitetu energije i frekvencije zračenja ili apsorpcije energije .

Na osnovu dobivenih vrijednosti energija možemo izračunati vrijednosti frekvencije prema izrazu za energiju zračenja $E = hf$.

Npr. iz relacije $E_3 - E_1 = hf$, koja govori o premještanju elektrona sa treće na prvu orbitu, možemo izvršiti proračun frekvencije:

$$f = \frac{E_3 - E_1}{h} = \frac{13,6 - 1,51}{6,63 \cdot 10^{-34}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,92 \cdot 10^{15} \text{ Hz}.$$

Talasna dužina energije na ovoj frekvenciji je:

$$\lambda_{3-1} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,92 \cdot 10^{15} \text{ Hz}} = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ m}.$$

PRILOG 11

Izvodi iz MATEMATIKE koji su korišteni za objašnjenja u odgovarajućim oblastima

- **Opšta kvadratna jednačina**

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **Trigonometrijske funkcije**

Definicija trigonometrijskih funkcija (a , b dužine kateta pravouglog trougla, c - dužina katete, α , β priležeći uglovi na hipotenuzi I nasuprot pravog ugla):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \cot g \beta \qquad \cot g \alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta$$

Osnovni odnosi između trigonometrijskih funkcija:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

Funkcije zbira i razlike:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Funkcija dvostrukog ugla i poluugla:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta, \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Formule za transformaciju:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih uglova, koji se najviše koriste u elektrotehnici:

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0
$ctg \alpha$	$\pm \infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$

▪ **Kompleksni brojevi**

$$i = \sqrt{-1}, \quad \sqrt{-a} = i\sqrt{a}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1$$

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d), \quad (a + ib) + (a - ib) = 2a$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

$$(a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

▪ Diferencijalni račun

Izvodi funkcija

Pravila za deriviranje funkcije

Zbira: $y(x) = y_1(x) + y_2(x) \quad y'(x) = y_1'(x) + y_2'(x)$

Razlike: $y(x) = y_1(x) - y_2(x) \quad y'(x) = y_1'(x) - y_2'(x)$

Zbira: $y(x) = y_1(x) \cdot y_2(x) \quad y'(x) = y_1'(x)y_2(x) + y_1(x)y_2'(x)$

Količnika: $y(x) = y_1(x) / y_2(x) \quad y'(x) = \frac{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)}{y_2^2(x)}$

Derivacije nekih elementarnih funkcija:

$y(x)$	C (<i>konst</i>)	x	$C \cdot x$	x^n ($n \neq 0$)	ax^n ($n \neq 0$)	a^x	$\frac{1}{x}$
$y'(x)$	0	1	C	$n \cdot x^{n-1}$	$an \cdot x^{n-1}$	$a^x \ln a$	$-\frac{1}{x^2}$

$y(x)$	$\ln x$	$\log x$	e^x	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$
--------	---------	----------	-------	----------	----------	-------	--------

$y'(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{M}{x} (M = \log e)$	e^x	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
---------	---------------	----------------------------	-------	----------	-----------	----------------------	-----------------------

▪ **INTEGRALI**

Neodređeni integral

Funkcija $F(x)$ je neodređeni integral funkcije $y = f(x)$ ako je

$$F'(x) = y'(x).$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad C - \text{ proizvoljna konstanta}$$

$$\int df(x) = f(x) + C$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx + C \quad [k = \text{konst. } k \neq 0]$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\cos x| + C$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Izraz za parcijalnu integraciju:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Određeni integral:

$$\text{Osnovna formula } \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Površinu ispod funkcije $y = f(x)$ u granicama integracije a i b

računamo pomoću određenog integral: $P = \int_a^b f(x)dx$.

Diferencijal funkcije:

$$dy = y'(x)dx$$

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Neki primjeri rješenja integral:

$$y = \int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{x^2}{2}$$

$$y = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$y = \int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$y = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{1}{x^{2/3}} dx = \int x^{-2/3} dx = \frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} + C = \frac{x^{1/3}}{1/3} = 3 \cdot x^{1/3} = 3\sqrt[3]{x}$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

PRILOG III

ISPRAVLJAČI

R. br	VELIČINA	POLUTALASNI ISPRAVLJAČ	PUNOTALASNI ISPRAVLJAČ	NAPOMENA
1.	$I_{sr} = I_0$	$I_{sr} = I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi i \cdot d(\omega t) = \frac{I_m}{\pi}$	$I_{sr} = I_0 = 2 \cdot \frac{I_m}{\pi}$	$I_m = \frac{U_m}{R_i + R_p}$
2.	$U_{sr} = U_0$	$U_{sr} = U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi u \cdot d(\omega t) = \frac{U_m}{\pi}$	$U_{sr} = U_0 = 2 \cdot \frac{U_m}{\pi}$	$U_{sr} = U_0 = I_{sr} \cdot R_p = \frac{I_m}{\pi} \cdot R_i =$ $= \begin{cases} \text{za } R_i \ll R_p & \left = \frac{U_m}{\pi} \right. \\ \text{ili } R_i = 0 & \end{cases}$
3.	I_{eff}	$I_{eff} = \frac{I_m}{2}$	$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$	
4.	U_{eff}	$U_{eff} = \frac{U_m}{2}$	$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$	
5.	η KKD	$\eta = \frac{P_{R_p}}{P_{ul}} \cdot 100\% = \frac{P_p}{P_{ul}} \cdot 100\% =$ $\eta = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1 + R_i/R_p} \cdot 100\% =$ $\frac{4,056}{1 + R_i/R_p} \%$	$\eta = \frac{P_p}{P_{ul}} \cdot 100\% =$ $= \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{R_p}{R_i + R_p}$ $\eta = \frac{81,2}{1 + R_i/R_p} \%$	$\eta = \frac{4,056}{1 + R_i/R_p} \%,$ $R_p \gg R_i \Rightarrow \eta_{max} = 40,56\%$ Za polutalasni ispravljač <hr/> $\eta_{max} = \frac{81,2}{1 + R_i/R_p} \% = 81,2\%$

				Za punotalasni ispravljač
6.	$\gamma = \frac{U_n}{U_{sr}}$	$\gamma = \frac{U_n}{U_{sr}},$ $U_{ef} = \sqrt{U_{sr}^2 + U_n^2}$ $U_n = \sqrt{U_{ef}^2 - U_{sr}^2},$ $\gamma = \frac{U_n}{U_{sr}} = \sqrt{\frac{U_{ef}^2}{U_{sr}^2} - 1} = \sqrt{F - 1}$	$\gamma = \sqrt{F - 1} =$ $= \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} = 0,48$	$\gamma = \sqrt{F - 1} = \sqrt{\left[\frac{\pi}{2}\right]^2 - 1} = 1.21$ <p>za polutalasni ispravljač.</p>
				Filtracija je bolja što je γ manji
7.	F	$F = \frac{I_{ef}^2}{I_{sr}^2} = \frac{\pi}{2}$		
8.	U_n	$U_{eff} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \dots}$ $U_n = \sqrt{U_{ef}^2 - U_{sr}^2}$		U_1, \dots, U_n Amplitude naizmeničnih napona
9.	$f [Hz]$	$50 [Hz],$	$100 [Hz],$	
10.	P_{ef}	$P_{ef} = I_{eff} \cdot U_{eff}$ $P_{ef} = I_{eff} \cdot I_{eff} (R_i + R_p) =$ $= I_{eff}^2 (R_i + R_p)$		

POLUTALASNI ISPRAVLJAČI

$$\begin{aligned}
 I_{sr} = I_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} i \cdot d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin \omega t d(\omega t) = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{U_m}{R_i + R_p} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{I_m}{2\pi} (-\cos \omega t) \Big|_0^{\pi} = \\
 &= \frac{I_m}{2\pi} [-(-1) - (-1)] = \frac{I_m}{2\pi} \cdot 2 = \frac{I_m}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} i^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_m^2 \sin^2 \omega t d(\omega t)} = \\
 &= \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t)} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{I_m^2}{4}} = \frac{I_m}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{sr} \equiv U_0 &= I_{sr} \cdot R_p = \frac{I_m}{\pi} \cdot R_p = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{U_m}{R_i + R_p} \cdot R_p = \\
 &= \frac{U_m}{\pi} \cdot \frac{R_p}{R_i + R_p} = \left| \text{za } R_i \ll R_p \text{ ili } R_i = 0 \right| = \frac{U_m}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$U_{sr} = \frac{U_m}{\pi} = \frac{\sqrt{2}U_{eff}}{\pi} = 0,45U_{eff}$$

$$U_{eff} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \dots}$$

$$U_1^2, U_2^2 \quad i \quad U_4^2 \dots$$

$$\gamma = \sqrt{F-1} = \sqrt{\left[\frac{\pi}{2}\right]^2 - 1} = 1.21$$

$$u_p = \frac{U_m}{\pi} + \frac{U_m}{2} \cos \omega t + \frac{2U_m}{3\pi} \cos 2\omega t -$$

$$- \frac{2U_m}{3 \cdot 5\pi} \cos 4\omega t - \frac{2U_m}{5 \cdot 7\pi} \cos 6\omega t - \frac{2U_m}{7 \cdot 9\pi} \cos 8\omega t \dots$$

$$u_p = \frac{U_m}{\pi(R_i + R_p)} R_p + \frac{U_m}{2\pi(R_i + R_p)} R_p \cos \omega t -$$

$$+ \frac{2U_m R_p}{3\pi(R_i + R_p)} \cos 2\omega t - \frac{2U_m R_p}{15\pi(R_i + R_p)} \cos 4\omega t + \dots$$

PUNOTALASNI ISPRAVLJAČ

$$u_p = \frac{2U_m R_p}{\pi(R_i + R_p)} - \frac{4U_m R_p}{3\pi(R_i + R_p)} \cos 2\omega t - \\ - \frac{4U_m R_p}{15\pi(R_i + R_p)} \cos 4\omega t + \dots$$

TROFAZNI ISPRAVLJAČI

$$u_{10} = U_m \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad u_{20} = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$u_{20} = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$u_{A0} = \begin{cases} u_{30} & 0 \leq t \leq \frac{T}{12} \\ u_{10} & \frac{T}{12} \leq t \leq \frac{5T}{12} \\ u_{20} & \frac{5T}{12} \leq t \leq \frac{9T}{12} \\ u_{30} & \frac{9T}{12} \leq t \leq T \end{cases}$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{3}{T} \int_{\frac{T}{12}}^{\frac{5T}{12}} U_m \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} U_m \Rightarrow$$

$$U_{sr} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} U_m = 0,83U_m = 1,17U_{eff}$$

TROFAZNI PUNOTALASNI ISPRAVLJAČI

$$u_{AB} = \begin{cases} u_{30} - u_{20} & 0 \leq t \leq \frac{T}{12} \\ u_{10} - u_{20} & \frac{T}{12} \leq t \leq \frac{3T}{12} \\ u_{10} - u_{30} & \frac{3T}{12} \leq t \leq \frac{5T}{12} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{cases}$$

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

$$\begin{aligned}
 U_{sr} &= \frac{1}{T} \int_0^T u_{AB} dt = \frac{6}{T} \int_{\frac{T}{12}}^{\frac{3T}{12}} (u_{10} - u_{20}) dt = \\
 &= \frac{6}{T} \int_{\frac{T}{12}}^{\frac{3T}{12}} \left(U_m \sin \frac{2\pi}{T} t - U_m \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{3} \right) \right) dt = \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \cdot U_m = 1,65 U_m = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \cdot U_{eff} = 2,34 U_{eff}
 \end{aligned}$$

STABILIZATORI NAPONA

$$U_{st} = f(U_G, I_P)$$

$$\Delta U_{st} = \frac{\partial U_{st}}{\partial U_G} \Delta U_G + \frac{\partial U_{st}}{\partial I_P} \Delta I_P = \frac{1}{\sigma} \Delta U_G + \rho \Delta I_P$$

Gdje su σ i ρ parametri koji opisuju stabilizator.

Faktor stabilizacije σ je :

$$\frac{1}{\sigma} = \left. \frac{\partial U_{st}}{\partial U_G} \right|_{I_P=const} \Rightarrow \sigma = \left. \frac{\partial U_G}{\partial U_{st}} \right|_{I_P=const}$$

$$\rho = \left. \frac{\partial U_{st}}{\partial I_P} \right|_{I_P=const} < 0 \dots\dots\dots 14.25$$

U praksi parametri σ i ρ imaju konačnu vrijednost, odakle proizilazi da je u principu i $\Delta U_{st} \neq 0$.

PARALELNI STABILIZATOR (regulator)

$$U_{izl} = U_{ul} \frac{R_{ab}}{R_5 + R_{ab}} = U_{ul} \frac{1}{1 + \frac{R_5}{R_{ab}}}$$

Za $R_p = const$, $U_{ul} \neq const$:

$$U_{ul} \uparrow \Rightarrow R_r \downarrow \Rightarrow R_{ab} = R_p \parallel R_r \downarrow \Rightarrow \frac{R_5}{R_{ab}} \uparrow \Rightarrow$$

$$U_{ab} = const \Rightarrow U_{ul} = const.$$

SERIJSKI REGULATOR

$$U_{izl} = U_p = \frac{R_p}{R_r + R_p} \cdot U_{ul}$$

Prilog IV

FIZIKALNE KONSTANTE I VELIČINE

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

R. br	KONSTANTA, VELIČINA	OZNAKA	VRIJEDNOST	DIMENZIJA
1.	Naelektrisanje elektrona	q	$1,6 \cdot 10^{-19} C$	C
2.	Masa slobodnog elektrona	m_0	$9,1085 \cdot 10^{-31} kg$	kg
3.	Brzina svjetlosti u vakumu	c	$2,998 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$	$m \cdot s^{-1}$
4.	Plankova konstanta	h	$6,625 \cdot 10^{-34} J \cdot s$	$J \cdot s$
5.	Plankova konstanta	h	$4,135 \cdot 10^{-15} eV \cdot s$	$eV \cdot s$
6.	Boltzmanova konstanta	k	$1,380 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$	$J \cdot K^{-1}$
7.	Boltzmanova konstanta	k	$8,620 \cdot 10^{-5} eV \cdot K^{-1}$	$eV \cdot K^{-1}$
8.	Permeabilnost slobodnog prostora/vakuma/vazduha	μ_0	$1,25663 \cdot 10^{-8} F \cdot m^{-1}$	$H \cdot cm^{-1}$
8.	Dielektrična konstanta slobodnog prostora/vakuma/vazduha	ϵ_0	$8,854 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$	$F \cdot m^{-1}$

	vazduha-permitivnost			
9.	Relativna dielektrična konstanta vakuma	ε_r	1	-
11.	Temperaturni napon $T = 300^0 K$	$V_T = \frac{kT}{q}$	$26 \cdot 10^{-3} V$ (0,258 V)	V
12.	Elektronvolt	eV	$1,602 \cdot 10^{-19} J$	J

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

Prilog V

FIZIKALNE KONSTANTE I VELIČINE
ZA POLUPROVODNIČKE MATERIJALE

R. br	KONSTANTA, VELIČINA	OZNAKA	VRIJEDNOST			DIMENZIJA
			Ge	Si	GaAs	
1.	Relativna dielektrična konstanta	ϵ_r	16	11,142	12,85-13,18	-
2.	Broj atoma u 1cm^3	N	$4,4 \cdot 10^{22} \frac{\text{atoma}}{\text{cm}^3}$	$5 \cdot 10^{22} \frac{\text{atoma}}{\text{cm}^3}$	$2,21 \cdot 10^{22} \frac{\text{atoma}}{\text{cm}^3}$	$\frac{\text{atoma}}{\text{cm}^3}$
3.	Sopstvena koncentracija na $T = 300^0 K$	n_i	$2,5 \cdot 10^{13} \text{cm}^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3}$	$7,79 \cdot 10^6 \text{cm}^{-3}$	$\frac{\text{atoma}}{\text{cm}^3}$
4.	Specifična otpornost čistog poluprovodnika na $300^0 K$	ρ_i	$45\Omega\text{cm}$	$230\Omega\text{cm}$	Ωcm	Ωcm
5.	Energetski procep na	W_g	$0,72\text{eV}$	$1,1\text{eV}$	$1,42\text{eV}$	eV

	$300^{\circ} K$					
6.	Energetski proces na $0^{\circ} K$	W_{g0}	$0,785 eV$	$1,21 eV$	$1,52 eV$	eV

ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

LITERATURA

- [1] Z. Bojković, D. Kostić: Elektrotehnika II, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu , Beograd, 2005.
- [2] J. Surutka: Osnovi elektrotehnike I,IIi III deo, Naučna knjiga, Beograd, 1980.
- [3] B. Popović: Osnovi elektrotehnike I,IIi III deo, Građevinska knjiga, Beograd, 1979, 1978.
- [4] T. Latinović, M Prša, "Osnovi elektrotehnike I električnih mašina", 2012, Univerzitet u Banjoj Luci
- [5] B. Popović, A. Đorđević: Osnovi elektrotehnike III deo, Građevinska knjiga, Beograd,1979, 1978
- [6] S.Kalabić: Elektrotehnika sa osnovama elektronike, VŠPPN, Prometej, Transportni inženjering, Banja Luka 2014.
- [7] V.Pinter: Osnovi elektrotehnike I i II deo, Tehnička knjiga, Zagreb,
- [8] D. Kostić , Z. Bojković: Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Elektrotehnike, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2005.
- [9] P. Biljanović: Poluprovodnički elementi, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [10]M. Živanov:Osnovi elektronike-komponente. TEORIJA, FTN,Novi Sad
- [11]M. Živanov:Osnovi elektronike-komponente. ZADACI, FTN,Novi Sad

[12] M. Živanov: Elektronike-Pojačavačka kola. TEORIJA I ZADACI, FTN, Novi Sad 2004.

[13] P. Biljanović: Elektronički sklopovi, Tehnička knjiga, Zagreb, 2005 .