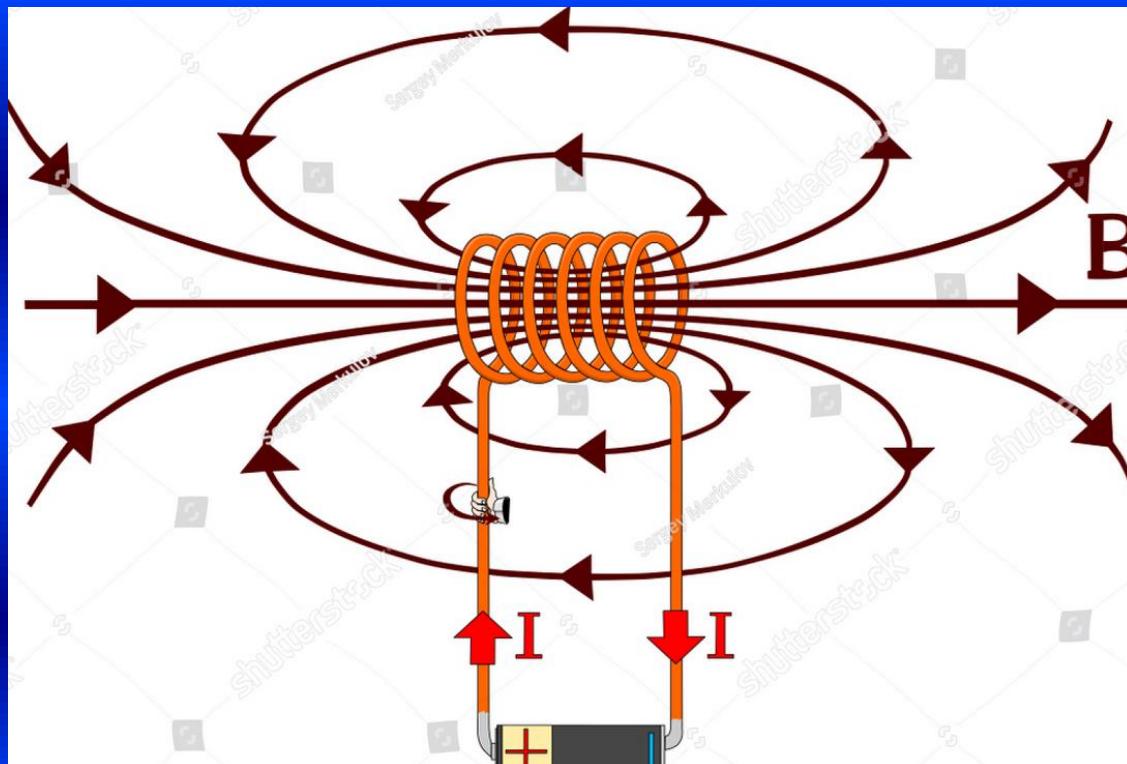


OSNOVI ELEKTROTEHNIKE I ELEKTRONIKE

-Jednosmrne struje-

Docent prof. dr Borivoje Milošević



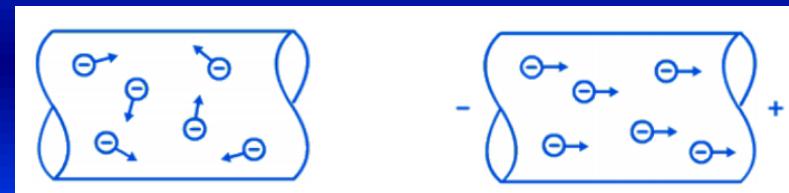
UVOD:

Električna struja je jedan od osnovnih pojmova u elektrotehnici kojim se opisuje usmereno kretanje velikog broja električnih opterećenja pod dejstvom električnog polja. Zbog sličnosti sa kretanjem tečnosti, koje se naziva strujanje, izabran je i naziv struja. U zavisnosti od toga da li se intenzitet struje menja posmatraju se:

- Vremenski konstantne električne struje koje se često nazivaju i jednosmerna struja ili stalna struja (na engleskom Direct Current - DC).
- Kretanje struje može biti i vremenski promenljivo po intenzitetu ali i po smeru i ona se naziva (na engleskom Alternating Current - AC). vremenski promenljiva električna struja

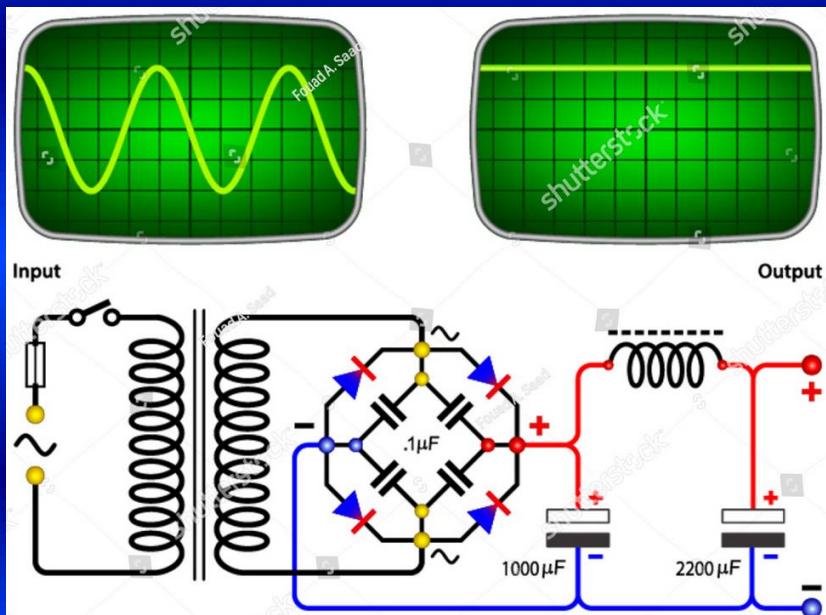
Električna struja predstavlja meru količine elektriciteta koja se pomerila u jedinici vremena. Pomeraj naelektrisanja može se vršiti na različite načine:

- Kod metalnih provodnika, mehanizam pomeranja je kretanje slobodnih elektrona.
- U rastvorima mehanizam pomeranja je kretanje pozitivno ili negativno naelektrisanih jona, kao što je to slučaj u elektrohemiskim baterijama ili u postupku galvanizacije.
- U poluprovodnicima naelektrisanje se kreće kretanjem slobodnih elektrona ili šupljina koje su nosioci pozitivnog naelektrisanja.



U elektrotehnici se sreću vrlo različite vrednosti struje:

- Struja kod munja i gromova je reda nekoliko desetina hiljada ampera.
- U industrijskim pogonima i električnim vozilima struje su reda stotinu ampera.
- Uređaji u domaćinstvu obično rade sa strujama u opsegu od 0.5 A do 16 A.
- U elektronskim kolima struje su reda mA, μ A ili nA.
- U raznim mernim uređajima u fizici struje mogu biti vrlo male, reda pA (10-12 A), kolike su i struje između nervnih ćelija kod živih bića.



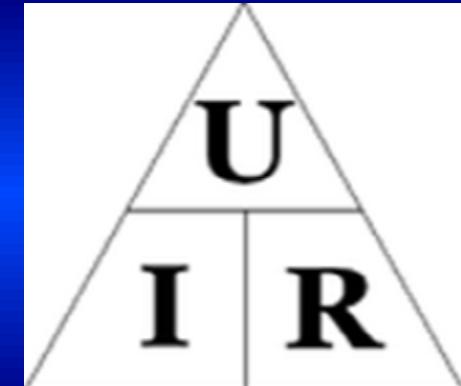
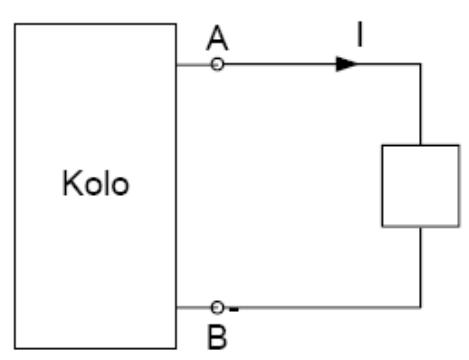
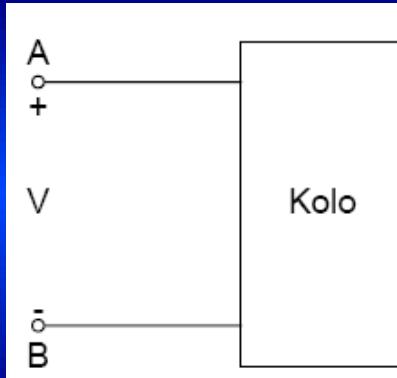
Medjunarodni SI sistem jedinica

10^1 deka	da	10^{-1} deci	d
10^2 hekta	h	10^{-2} centi	c
10^3 kila	k	10^{-3} mili	m
10^6 mega	M	10^{-6} mikro	μ
10^9 gigo	G	10^{-9} nano	n
10^{12} tera	T	10^{-12} pikو	p
10^{15} peta	P	10^{-15} femto	f
10^{18} eksa	E	10^{-18} ato	a
10^{21} zeta	Z	10^{-21} zepto	z
10^{24} jota	Y	10^{-24} joto	y

Napon

- *Napon* predstavlja potencijalnu energiju. Razlika potencijala predstavlja sposobnost prenosa nanelektrisanja u toku struje.
- Jedinica za napon je Volt (V) i predstavlja energiju od 1 J, koja je potrebna za pomeraj pozitivnog nanelektrisanja od 1 C.
- Uobičajena oznaka za napon u elektronici je V ili v.
- Posmatrajući inkrementalne promene energije i nanelektrisanja, trenutni napon se može definisati kao:

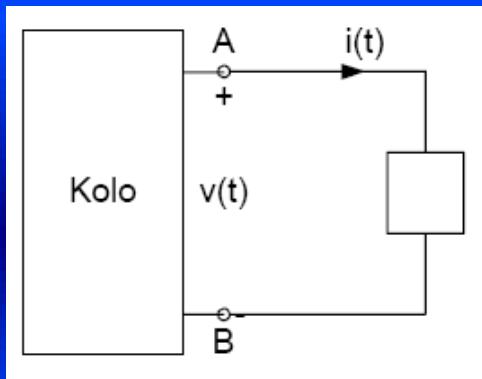
$$v = \frac{dw}{dq}$$



Označavanje polariteta napona i referentnog smera za struju.

Energija i snaga

- Energija je važan pojam u analizi električnih kola. U elektrotehnici i elektronici se srećemo sa elementima koji primaju energiju od kola ili predaju energiju kolu. Smer prenosa energije zavisi od znakova napona i struje.



Snaga se definiše kao brzina promene energije u vremenu i jedinica je vat [W] :

$$P = \frac{dw}{dt} = vi$$

Na primer, energija iz kola se *predaje* elementu vezanom između tačaka A i B

- Ako je $v(t) > 0$ i $i(t) > 0$, Za takav element se kaže da prima energiju i on se naziva *pasivni element*. Kod pasivnih elemenata *pozitivna struja ulazi u pozitivni naponski terminal*.
- Ako je $v(t) > 0$ i $i(t) < 0$, element predaje energiju kolu. Takav element se naziva *aktivni element* ili *izvor*. Kod aktivnih elemenata *pozitivna struja ulazi u negativni naponski terminal*.

$$V_{AB} = -V_{BA}$$

Električno polje

- U prethodnom izlaganju smo objasnili da svako nanelektrisano telo deluje na druga nanelektrisana tela nekom mehaničkom silom. Dakle, oko svakog nanelektrisanog tela postoji polje koje se naziva *električno polje*. Jačina električnog polja se definiše kao vektor čiji je intenzitet:

$$E = \frac{F}{q}$$

- Električno polje oko tačkastog nalektrisanja je:

$$E = k \frac{q}{d^2}$$

- Električno polje između dve ravne paralelne ploče razdvojene dielektrikom debljine d je:

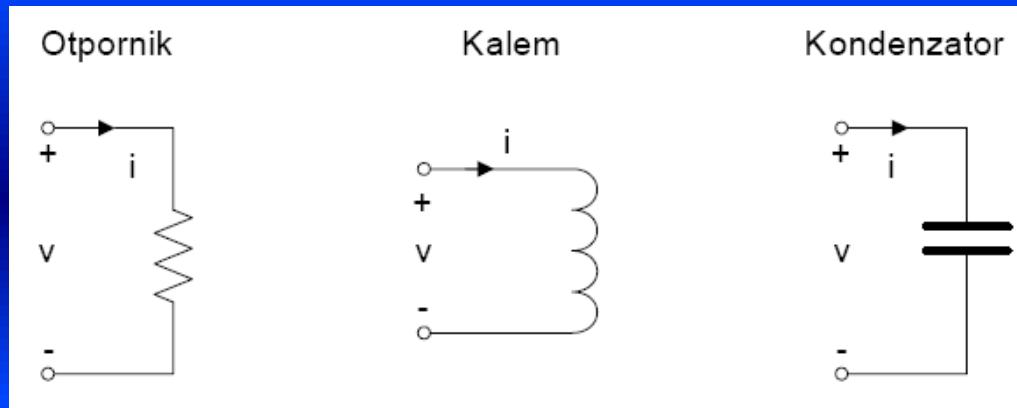
$$E = \frac{q}{\epsilon S} = \frac{V}{d}$$

Modelovanje električnih sistema

- *Modelovanje je proces uprošćenog predstavljanja* realnog fizičkog sistema na način koji omogućava primenu matematičkih tehnika za analizu takvog sistema.
 - Uprošćavanje predstave sistema se izvodi usvajanjem izvesnih pretpostavki kojima se zanemaruju nebitna svojstva.
 - U analizi električnih kola jedna od najvažnijih uprošćavajućih pretpostavki je da su osnovne karakteristike kola koncentrisane u pojedinačne blokove (električne elemente), koji su povezani idealnim provodnicima.
 - Takva pretpostavka je opravdana sve dok učestanost signala nije suviše visoka, tj. manja je od mikrotalasnih učestanosti.

Idealni električni elementi

- Idealni električni elementi su kompletno opisani matematičkom relacijom između napona na elementu i struje kroz element.
- Idealni električni elementi se mogu podeliti na aktivne ili pasivne zavisno od toga da li predaju energiju ostatku kola ili primaju energiju iz kola.
- Idealni pasivni električni elementi su *otpornik*, *kalem* i *kondenzator*.



- Oni su opisani matematičkim relacijama:

$$v = Ri$$

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$v = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

$$i = \frac{1}{R} v$$

$$i = \frac{1}{L} \int v \, dt$$

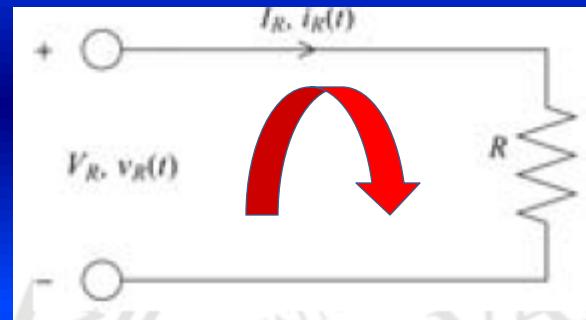
$$i = C \frac{dv}{dt}$$

Otpornik

- **Otpornik** predstavlja komponentu kod koje se energija koja se predaje elementu pretvara u toplotu ili svetlosnu energiju. Konstanta R u definicionim relacijama predstavlja *otpornost* otpornika (jedinica Om - Ω).

$$v(t) = R i(t), \quad i(t) = \frac{1}{R} v(t)$$

- **Otpornik** se koristi za predstavljanje linearne zavisnosti napona i struje. Na slici je nacrtan je simbol koji se najčešće koristi u praksi za crtanje otpornika u električnim šemama.



- Kada se analiziraju naponi i struje koji imaju konstantnu vrednost i ne menjaju se tokom vremena, napon i struja se mogu predstaviti na isti način:

$$V = RI \quad I = \frac{1}{R}V$$

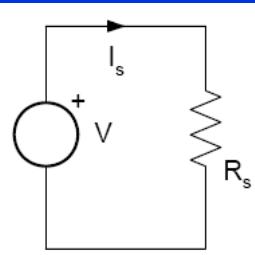
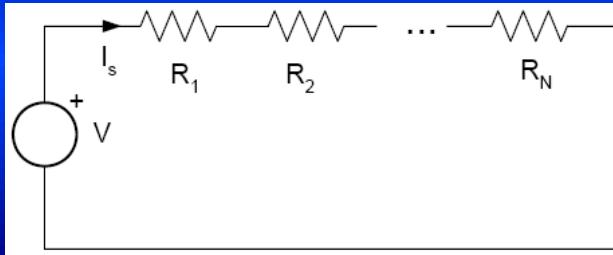


Za žičane provodnike kod kojih je površina poprečnog preseka S , a dužina l :

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

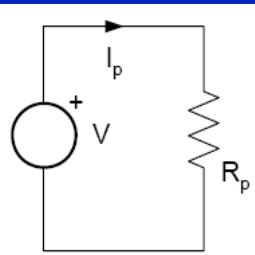
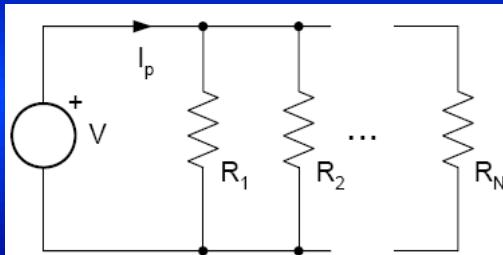
Serijska i paralelna veza otpornika

- Prvi i drugi Kirhofov zakon opisuju stanje svakog električnog kola. Međutim, kada se primene na kola sa samo jednim parom čvorova, ili na kola sa samo jednom petljom, oni daju neke vrlo korisne rezultate, koji se mogu primeniti za uprošćavanje električnih kola.



Serijska veza:

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N$$



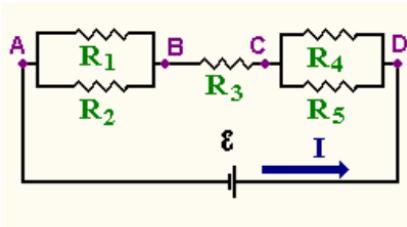
Paralelna veza:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

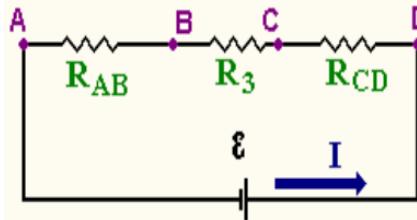
U slučaju dva otpornika vezana paralelno:

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

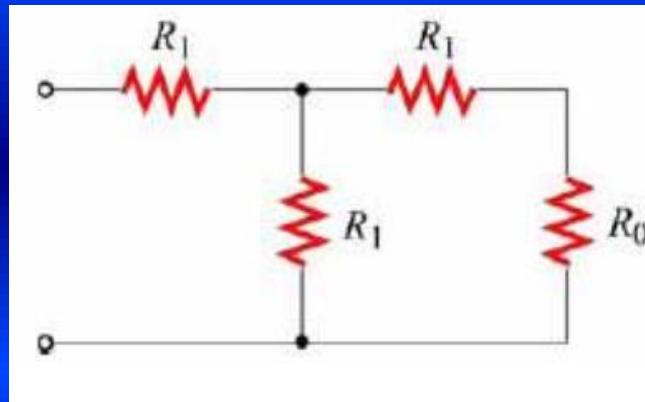
Serijska i paralelna veza otpornika



$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
$$R_{CD} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

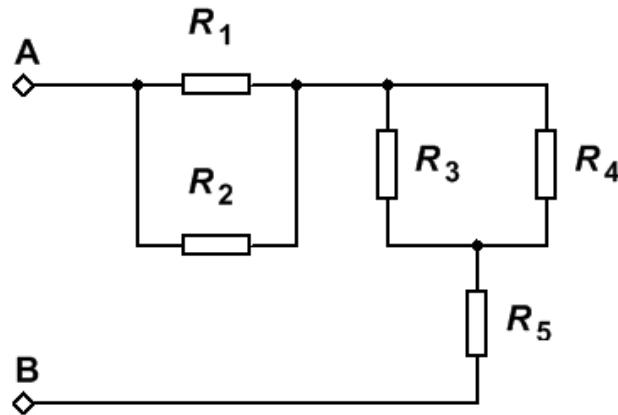


$$R_{eq} = R_{AB} + R_3 + R_{CD}$$

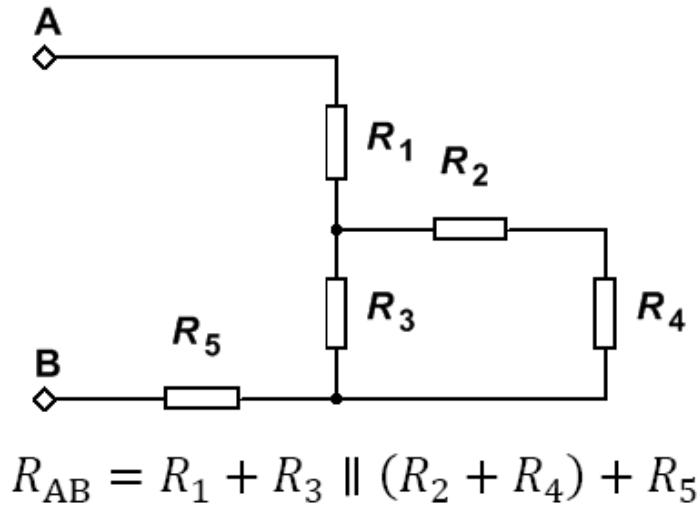


$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_0}$$
$$R' = \frac{R_1(R_1 + R_0)}{R_1 + R_1 + R_0} = \frac{R_1(R_1 + R_0)}{2R_1 + R_0}$$
$$R_{eq} = R_1 + R' = R_1 + \frac{R_1(R_1 + R_0)}{2R_1 + R_0}$$

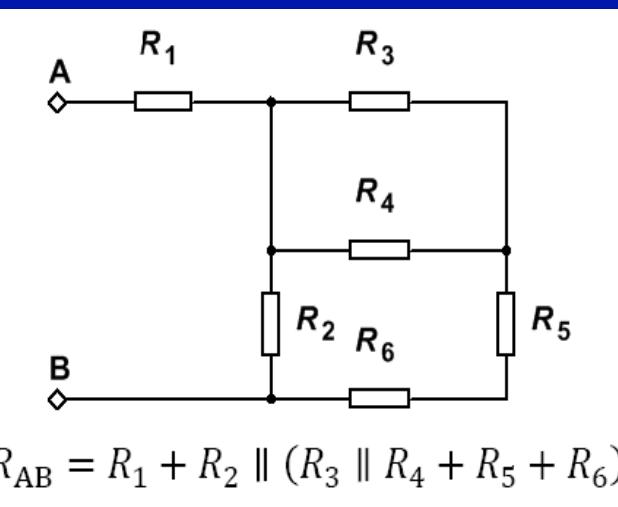
Serijska i paralelna veza otpornika



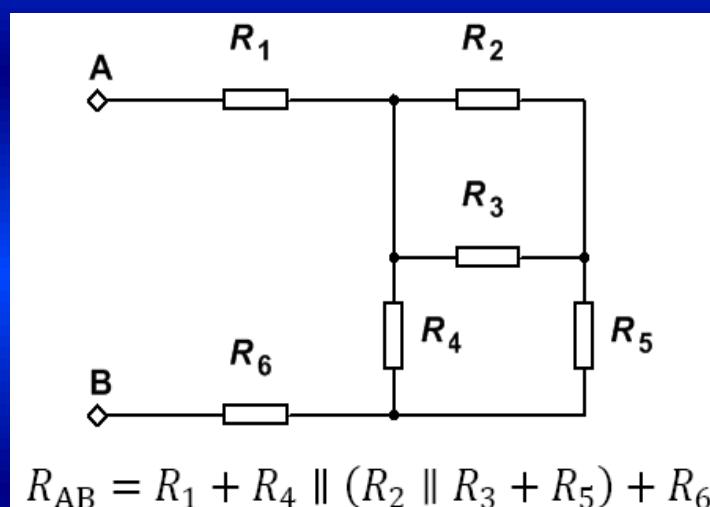
$$R_{AB} = R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4 + R_5$$



$$R_{AB} = R_1 + R_3 \parallel (R_2 + R_4) + R_5$$



$$R_{AB} = R_1 + R_2 \parallel (R_3 \parallel R_4 + R_5 + R_6)$$



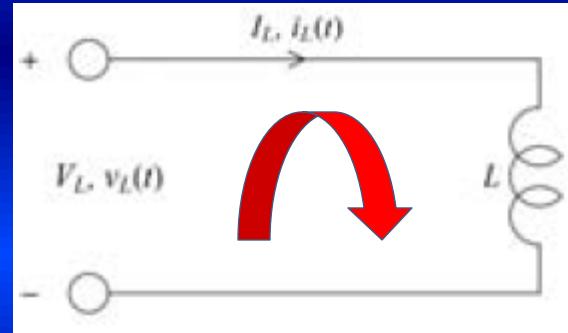
$$R_{AB} = R_1 + R_4 \parallel (R_2 \parallel R_3 + R_5) + R_6$$

Kalem - induktivnost

- **Kalem** predstavlja komponentu kod koje se energija koja se predaje elementu pretvara u magnetsko polje. Konstanta L u definicionim relacijama predstavlja *induktivnost* kalema (jedinica Henri - H).

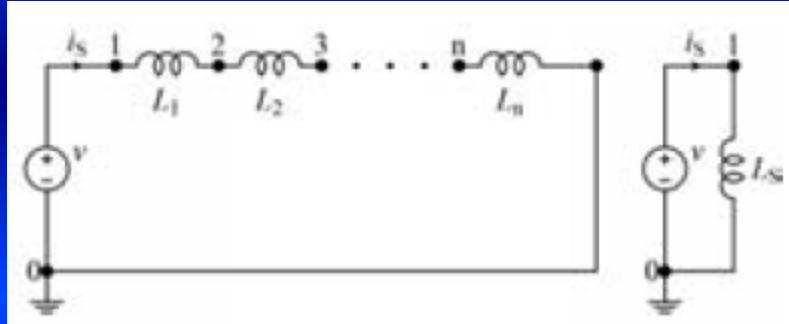
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$$

- **Kalem** se koristi za predstavljanje napona koji je srazmeran prvom izvodu struje. Na slici je nacrtan simbol koji se najčešće koristi u praksi za crtanje kalema u električnim šemama.



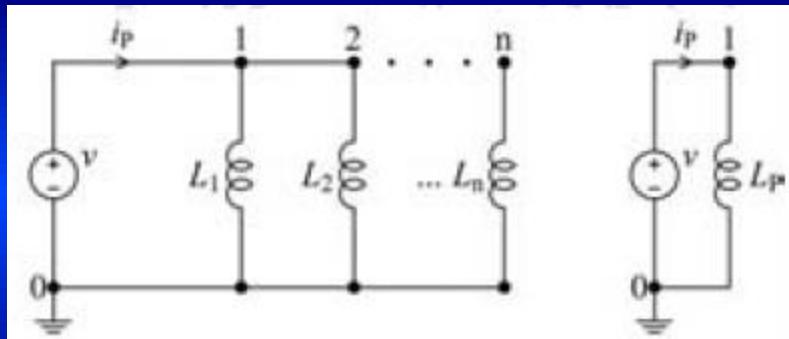
- Kada se analiziraju naponi i struje koji imaju konstantnu vrednost i ne menjaju se tokom vremena, napon na kalemu je uvek jednak nuli.

Serijska i paralelna veza kalema



- Ekvivalentna induktivnost redne veze kalemova jednaka zbiru vrednosti induktivnosti kalemova koji su redno vezani:

$$L_S = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$



- Ekvivalentna recipročna vrednost induktivnosti paralelne veze kalemova jednaka zbiru recipročnih vrednosti induktivnosti koje su paralelno vezane:

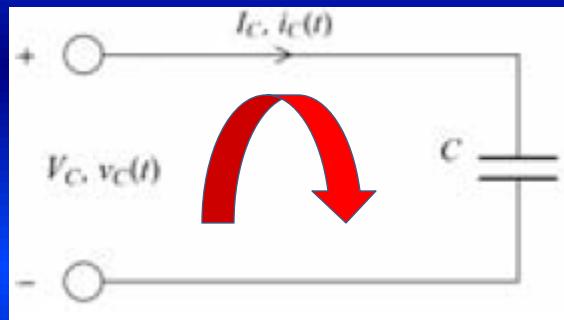
$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n}$$

Kondenzator

- Kondenzator predstavlja komponentu kod koje se energija koja se predaje elementu pretvara u električno polje. Konstanta C u definicionim relacijama predstavlja *kapacitivnost* kondenzatora (jedinica Farad - F).
- Kondenzator se koristi za predstavljanje struje koja je srazmerna prvom izvodu napona.

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt, \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

- Na slici je nacrtan simbol koji se najčešće koristi u praksi za crtanje kondenzatora u električnim šemama.

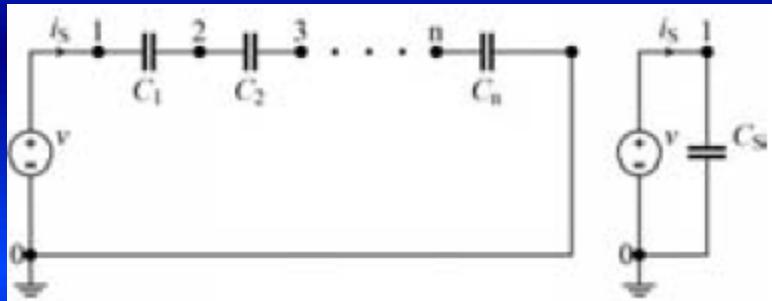


Napon na terminalima kondenzatora srazmeran je nanelektrisanju u slučaju da se opterećenje ne menja u funkciji vremena, a da kroz kondenzator ne protiče struja:

$$U=Q/C \quad Q=C*U \quad C=Q/U=(\epsilon S)/d$$

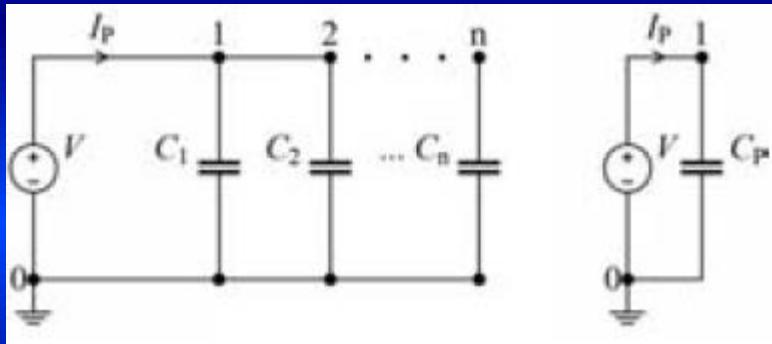
- Kada se analiziraju naponi i struje koji imaju konstantnu vrednost i ne menjaju se tokom vremena, struja kroz kondenzator je uvek jednaka nuli $I=0$.

Serijska i paralelna veza kondenzatora



- Recipročna vrednost ekvivalentne kapacitivnosti serijske veze kondenzatora jednaka zbiru recipročnih vrednosti kapacitivnosti redno vezanih kondenzatora:

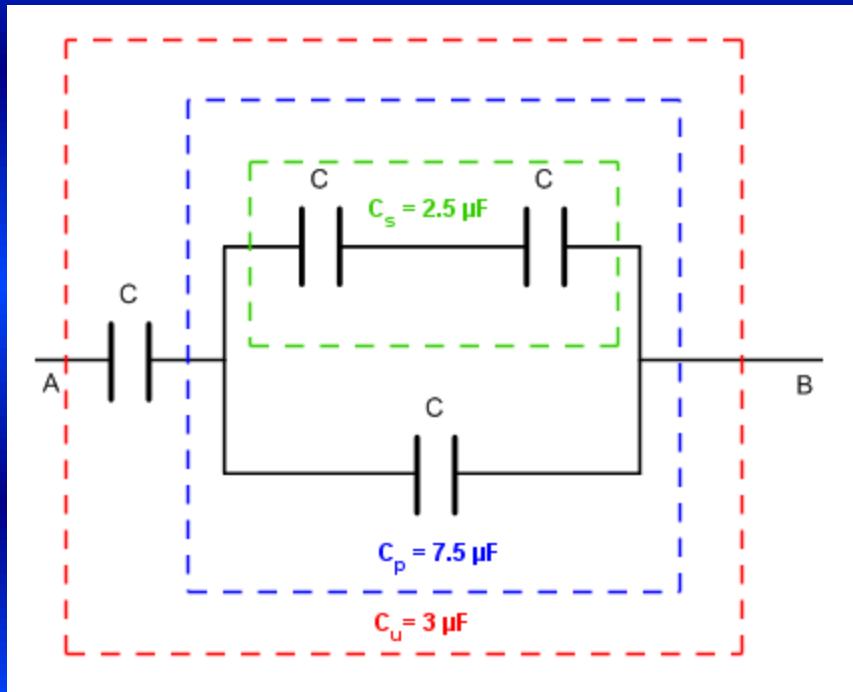
$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$



- Ekvivalentna kapacitivnost paralelne veze kondenzatora jednaka zbiru kapacitivnosti paralelno vezanih kondenzatora . Pošto je isti napon na priključcima svih kondenzatora, tada je ukupno nanelektrisanje svih kondenzatora jednako zbiru pojedinačnih nanelektrisanja:

$$C_P = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Primer: Četiri kondenzatora jednakih kapaciteta $C=5\mu F$ spojena su kao na slici. Koliko iznosi ukupan kapacitet ovako spojenih kondenzatora između tačaka A i B ?



$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \longrightarrow C_s = \frac{C}{2} = 2.5 \mu F$$

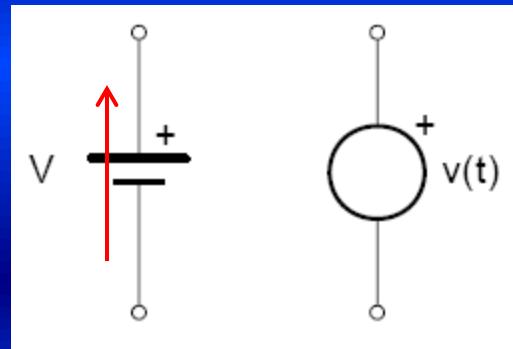
$$C_p = C_s + C = 7.5 \mu F$$

$$\frac{1}{C_u} = \frac{1}{C_p} + \frac{1}{C} = \frac{C + C_p}{C_p C}$$

$$C_u = \frac{C_p C}{C + C_p} = \frac{7.5 \cdot 5}{12.5} = 3 \mu F$$

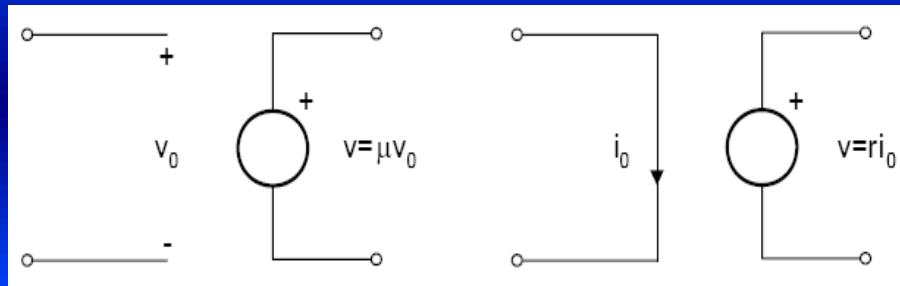
Idealni nezavisni električni izvori

- Idealni *nezavisni naponski izvor* je aktivni element koji održava napon između pristupa nezavisno od struje kroz njega. Vrednost napona nezavisnog naponskog izvora može biti konstantna V (kao kod elektrohemijskih baterija), ili neka funkcija vremena $v(t)$.
- Simboli koji se koriste za predstavljanje idealnih naponskih izvora prikazani su na slici. Znak + pored simbola označava referentni polaritet napona izvora.

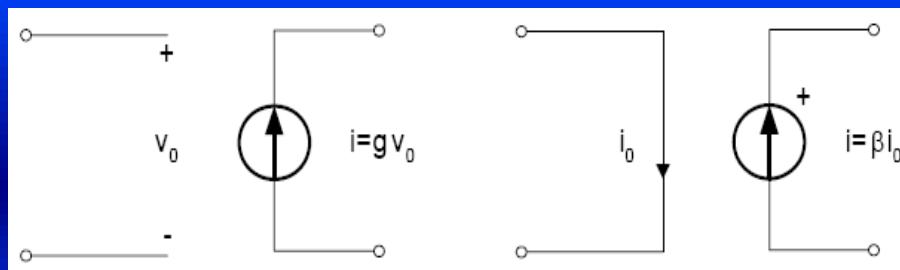


Idealni zavisni (kontrolisani) električni izvori

- Za razliku od nezavisnih izvora koji generišu neki napon (ili struju) nezavisno od toga što se dešava u ostatku kola, idealni *zavisni izvori* generišu napon (ili struju) koja zavisi od nekog drugog napona ili struje u kolu.
- Ovakvi izvori su važni jer omogućavaju modelovanje mnogih elektronskih elemenata, kao što su, na primer, tranzistori.

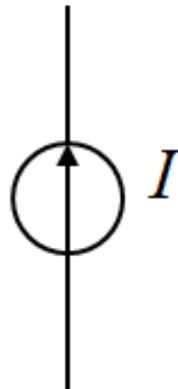


- **Naponski kontrolisani naponski izvor (NKNI) i**



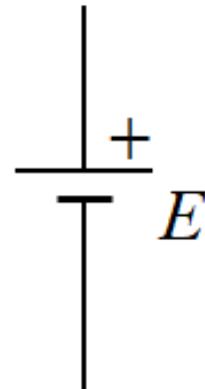
- **Strujno kontrolisani naponski izvor (SKNI).**

Generatori - strujni i naponski izvori



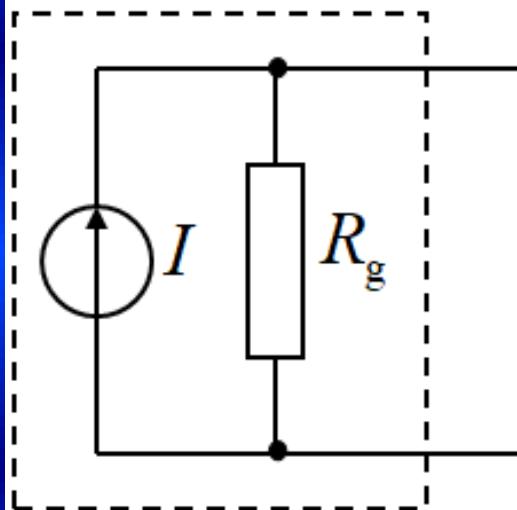
Idealni
strujni
generator

$$R_g \rightarrow \infty$$



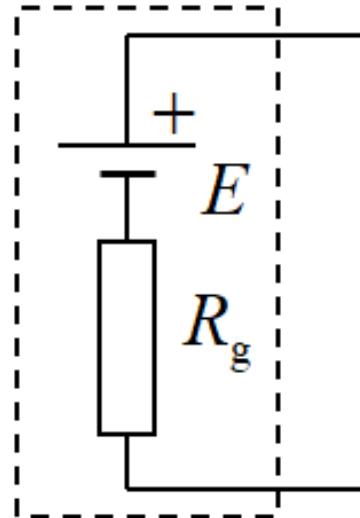
Idealni
naponski
generator

$$R_g \rightarrow 0$$



Realni
strujni
generator

R_g je
unutrašnja
otpornost
generatora



Realni
naponski
generator

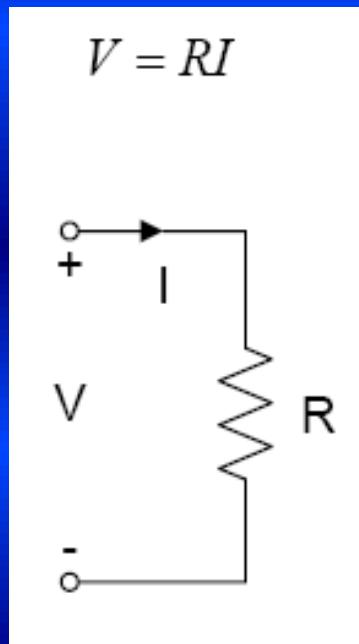
Kola sa stalnim jednosmernim strujama

- Kola sa stalnim jednosmernim strujama sastoje se samo od otpornika i izvora konstantnog napona ili struje. Kalemovi se mogu zameniti kratkim spojem, a kondenzatori raskinutom vezom.
- Jednačine koje opisuju takva kola su linearne, tako da se linearni sistem jednačina može lako rešiti.
- Kod kola sa stalnim jednosmernim strujama lako se objašnjavaju osnovni zakoni, kao što su Omov zakon, prvi i drugi Kirhofov zakon, a kasnije se mogu ovi zakoni generalizovati na slučaj sa promenljivim strujama i naizmeničnim strujama.

Omov zakon

- Omov zakon definiše zavisnost napona od struje kod otpornika i glasi:

Napon na otporniku je direktno proporcionalan struji kroz otpornik.



Konstanta proporcionalnosti R predstavlja *otpornost* otpornika. Jedinica za otpornost je Om (Ω). Tipične vrednosti otpornosti koje se sreću u elektrotehnici i elektronici se kreću od delova Ω do nekoliko $M\Omega$.

Provodnost otpornika G je recipročna vrednost otpornosti i jedinica je Siemens [S] :

$$G = \frac{1}{R}$$

Snaga razvijena na otporniku je proizvod struje i napona:

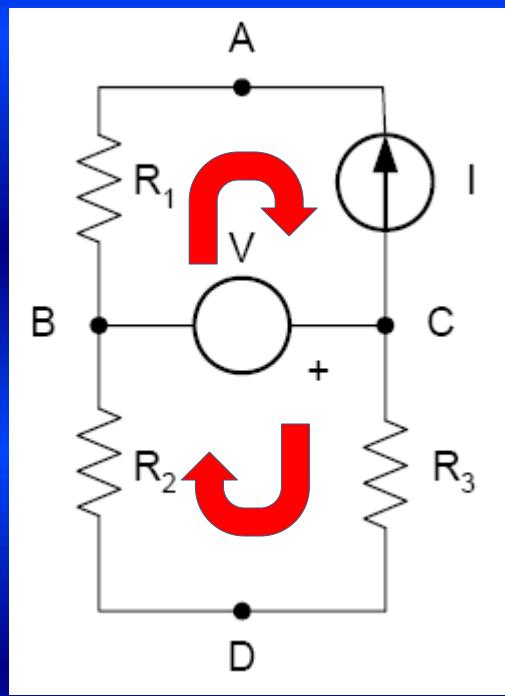
$$P = VI$$

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} = GV^2 = \frac{I^2}{G}$$



Električno kolo

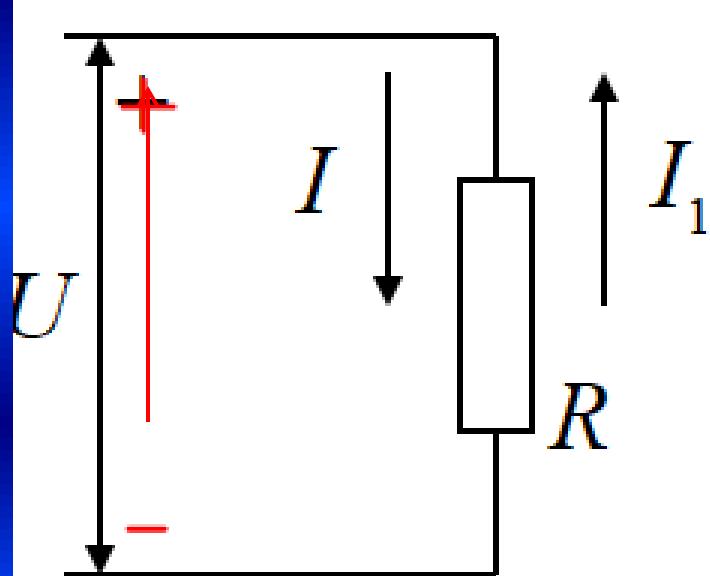
- *Električno kolo predstavlja interkonekciju dva ili više elemenata.* Povezivanje elemenata se vrši provodnicima čija se otpornost može zanemariti.



Pre nego što formulišemo osnovne zakone koji opisuju ponašanje električnih kola, moramo se upoznati sa nekoliko definicija osnovnih termina:

- *Čvor* kola je tačka spajanja dva ili više elemenata kola (A, B, C, D).
- *Grana* je deo kola koji sadrži samo jedan element i čvorove na krajevima elementa (AB, AC, BC, BD, CD).
- *Petlja* predstavlja ma koji zatvoreni put kroz kolo kod koga se kroz jedan čvor može proći samo jednom (ACBA, BCDB, ACDBA).
- *Kontura* predstavlja petlju koji ne sadrži u sebi neku drugu petlju (ACBA, BCDB).

Usaglašavanje referentnih smerova



Smer struje je od - ka +

$$R = \frac{U}{I}$$

$$U = I \cdot R$$

$$I = \frac{U}{R}$$

$$R = -\frac{U}{I_1}$$

ILI

$$U = -I_1 \cdot R$$

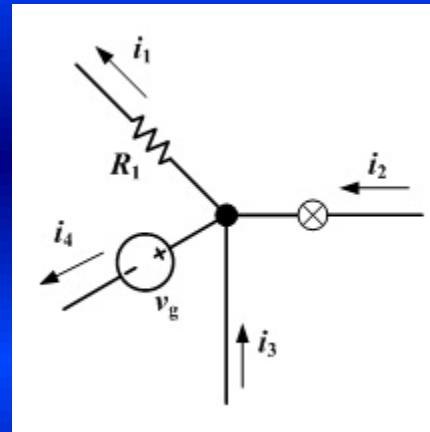
$$I_1 = -\frac{U}{R}$$

Prvi (strujni) Kirhofov zakon

- Nemački fizičar Gustav Kirhof je još sredinom 19. veka formulisao dva osnovna zakona koji opisuju ponašanje električnih kola. Prvi Kirhofov zakon se odnosi na struje u kolu i glasi:

Algebarska suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je nuli. (Suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je sumi struja koje ističu iz istog čvora.)

$$\sum_{j=1}^N I_j = 0$$



$$i_2 + i_3 = i_1 + i_4$$

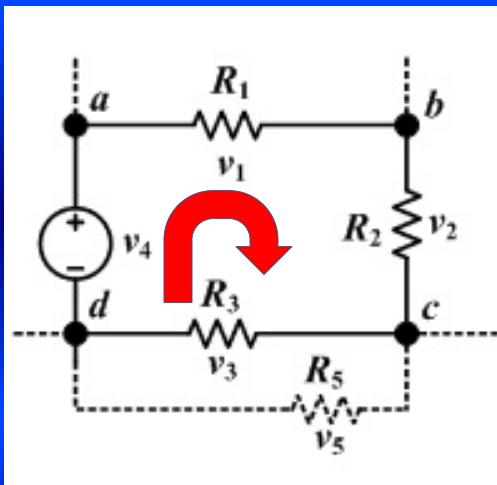
gde je I_j struja j -te grane koja ulazi u čvor, dok je N broj grana koje ulaze u čvor.

Drugi (naponski) Kirhofov zakon

- Drugi Kirhofov zakon se odnosi na napone u kolu i glasi:

*Algebarska suma napona u bilo kojoj petlji kola jednaka je nuli.
(Zbir svih elektromotornih i elektrootpornih sila u jednoj konturi električnog kola jednak je nuli.)*

$$\sum_{j=1}^N V_j = 0$$



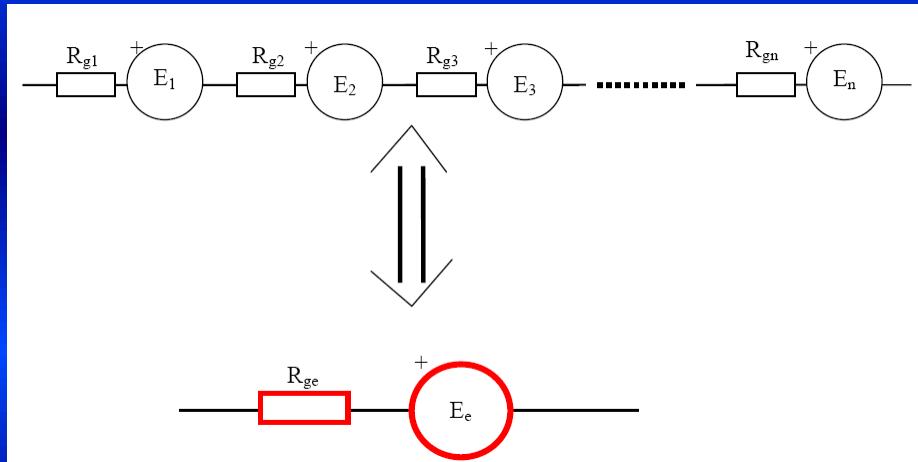
$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$$

$$\sum_{i=1}^n E_i - \sum_{k=1}^m R_k \cdot I_k = 0$$

$$\sum E_i = \sum R_i I_i$$

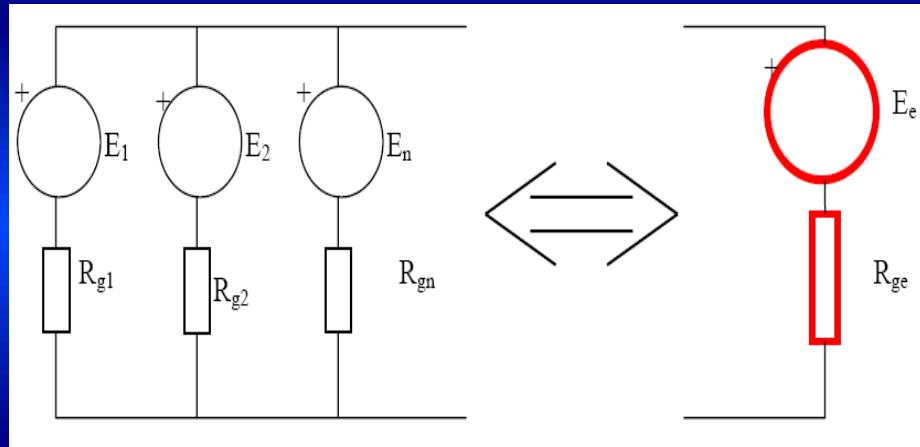
gde je V_j napon na j -toj grani petlje koja ukupno ima N grana.

Vezivanje naponskih generatora



Redna veza:

$$E_e = \sum \pm E$$
$$R_{ge} = \sum R_g$$



Paralelna veza:

$$E_e = \frac{\sum \frac{\pm E_k}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_k}}$$
$$\frac{1}{R_e} = \sum \frac{1}{R_k}$$

Konturne struje

- Kontura (zatvorena strujna putanja) se sastoji od dve ili više strujnih grana koje mogu da poseduju izvore EMS i u kojima se nalaze otpornosti, nosioci elektrootpornih sila, tj. padova napona.
- Usvaja se pozitivan smer obilaska konture i smer proticanja struje kroz svaku granu koja je sastavni deo posmatrane konture.
- EMS su pozitivne ako se njihov smer poklapa sa pozitivnim smerom obilaska konture. Padovi napona su negativni kada je smer struje isti sa usvojenim pozitivnim smerom obilaska konture.

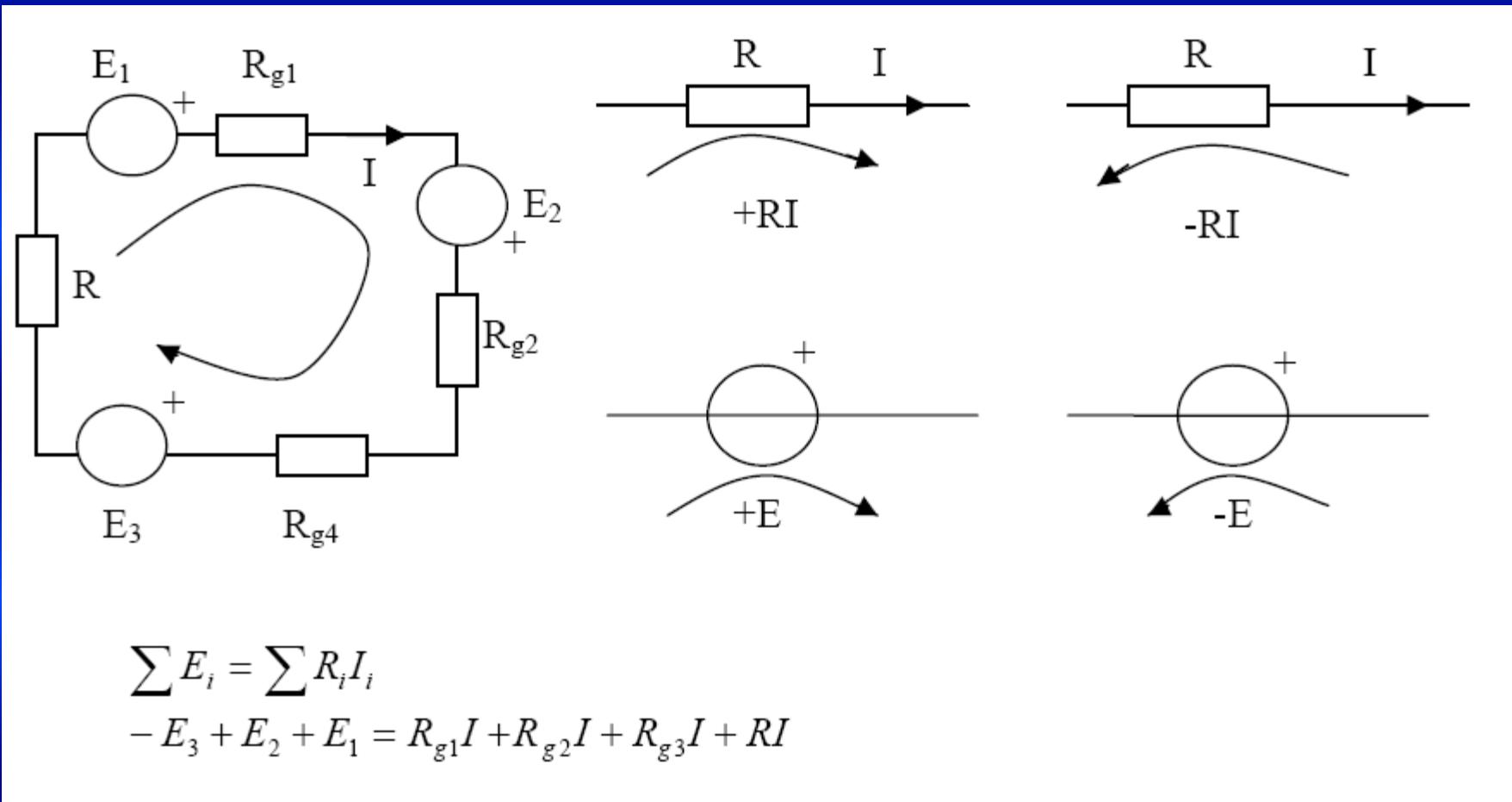
Postupak rešavanja

Odaberemo ref.
smer struja u
granama mreže
i označimo ih.

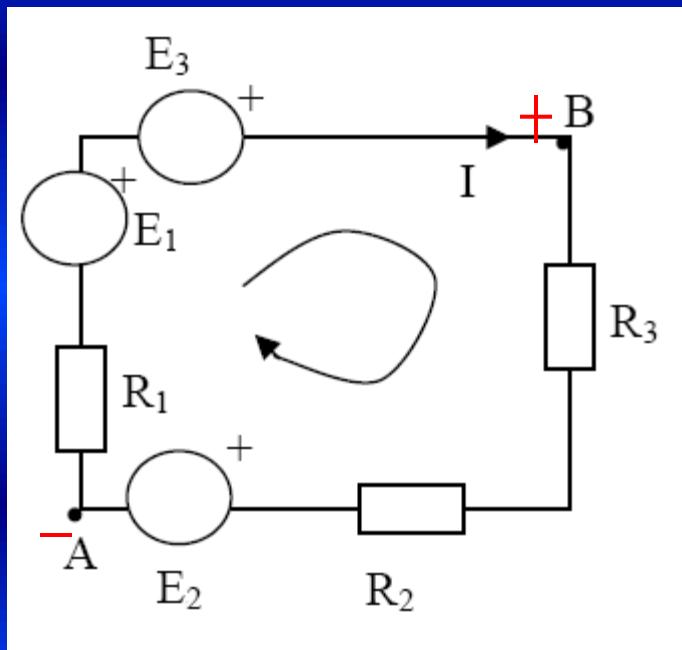
Prebrojimo grane i
čvorove i
odredimo broj
nezavisnih čvorova
i kontura.

Odaberemo $(n_c - 1)$
čvor I n_k kontura
napišemo jednačine
po I i II
Kirhofovom zakonu.

Prosto kolo sa više generatora i prijemnika



- Primer: Naći napon izmedju dve tačke u kolu $U_{AB}=?$ Podaci:
 $E_1=40V$, $E_2=75V$, $E_3=25V$, $R_1=150\Omega$, $R_2=400\Omega$, $R_3=450\Omega$



$$-E_1 - E_3 + E_2 + IR_1 + IR_2 + IR_3 = 0$$

$$-E_1 - E_3 + E_2 = -IR_1 - IR_2 - IR_3 \quad /*(-1)$$

$$E_1 + E_3 - E_2 = IR_1 + IR_2 + IR_3 = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

$$I = (E_1 + E_3 - E_2) / (R_1 + R_2 + R_3) \quad I = -60mA$$

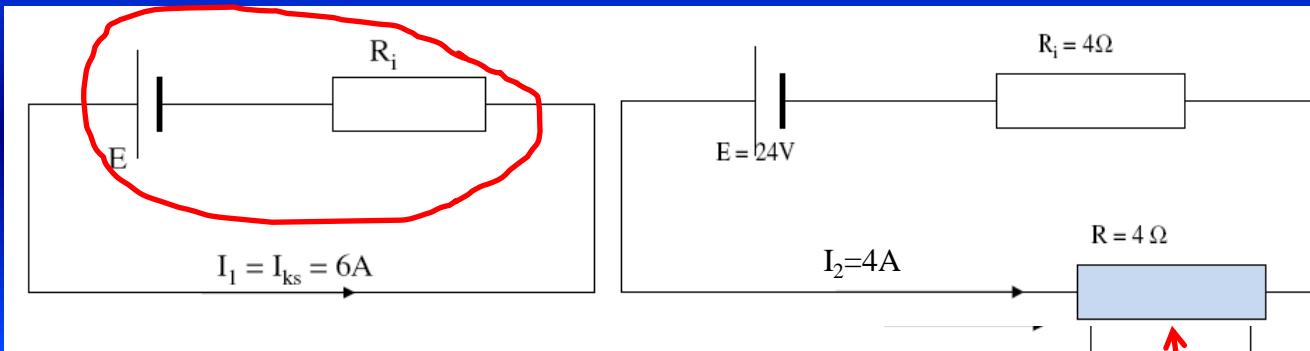
$$-U_{AB} - E_2 = R_3 I + R_2 I = I(R_3 + R_2)$$

$$U_{AB} = -E_2 - I(R_3 + R_2)$$

Zamenom struje iz celog kruga dobijamo:

$$U_{AB} = -E_2 - ((E_3 - E_2 + E_1)(R_3 + R_2)) / (R_1 + R_2 + R_3)$$

PRIMER: Izvor E daje struju $I_1 = 6A$. Ako na izvor spojimo potrošac otpora $R = 4\Omega$, jacina struje u krugu $I_2 = 4A$. Izračunaj elektromotornu силу E i unutrašnji otpor izvora R_i . Kolika je najveća korisna snaga koju može dati ovaj izvor? Nacrtaj U – I karakteristiku ovog naponskog izvora.



$$I_1 = I_{ks} = \frac{E}{R_i}$$

$$6 = \frac{E}{R_i}$$

$$E = 6R_i$$

$$R = R_i = 4\Omega$$

$$I = \frac{24}{4+4} = 3A$$

$$P_{k\max} = I^2 \cdot R = 3^2 \cdot 4 = 36W$$

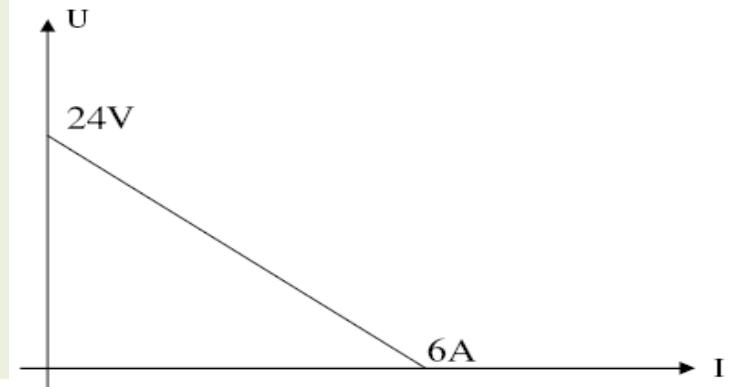
Kada se u kolo uneše otpor:

$$E = I_2(R + R_i), E = 4 \cdot 2 + 4R_i$$

$$6R_i = 8 + 4R_i, 2R_i = 8$$

$$R_i = \frac{8}{2} = 4\Omega$$

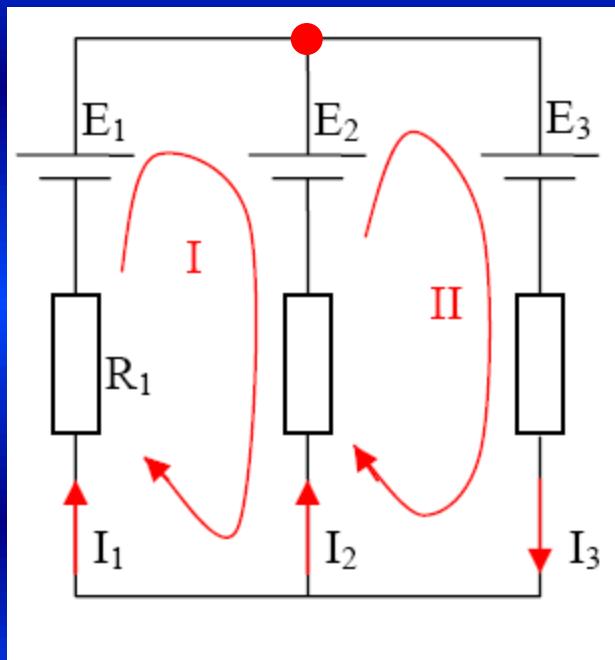
$$E = 8 + 4 \cdot 4 = 24V$$



Primer: Izračunati struje I_1 , I_2 i I_3 u kolu sa slike. Podaci:

$$E_1=15V, E_2=E_3=20V, R_1=5\Omega, R_2=10\Omega, R_3=15\Omega$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \longrightarrow I_3 = I_1 + I_2$$



$$E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2$$

$$E_2 - E_3 = R_2 I_2 - R_3 I_3$$

$$\dots \dots \dots - 5 = 5I_1 - 10I_2 \longrightarrow I_1 = 2I_2 - 1$$

$$0 = 10I_2 - 15(I_1 + I_2)$$

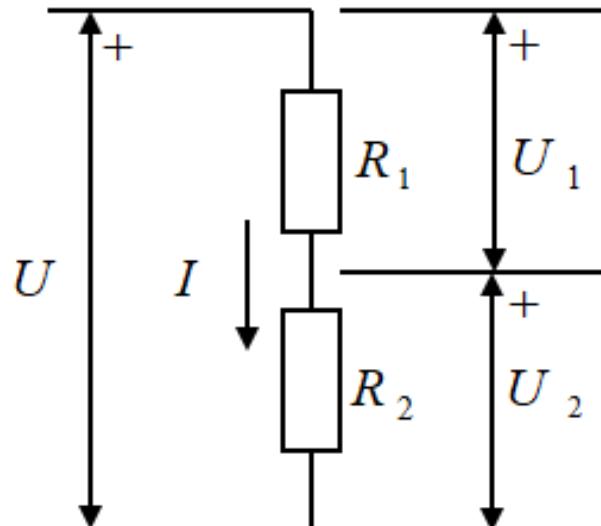
$$\dots \dots \dots 0 = 10I_2 - 15(2I_2 - 1) - 15I_2$$

$$0 = 10I_2 - 30I_2 + 15 - 15I_2$$

$$0 = -35I_2 + 15 \quad I_2 = 15/35 = 0.42A$$

$$I_1 = -0.16A \quad I_3 = 0.26A$$

Naponski razdelnik



$$U - U_1 - U_2 = 0$$

$$U_1 = R_1 \cdot I \quad U_2 = R_2 \cdot I$$

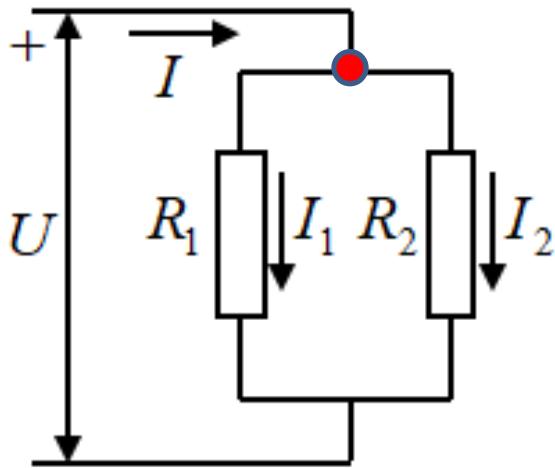
$$U - R_1 \cdot I - R_2 \cdot I = 0$$

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}$$

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

Strujni razdelnik



$$U = R_1 \cdot I_1$$

$$U = R_2 \cdot I_2$$

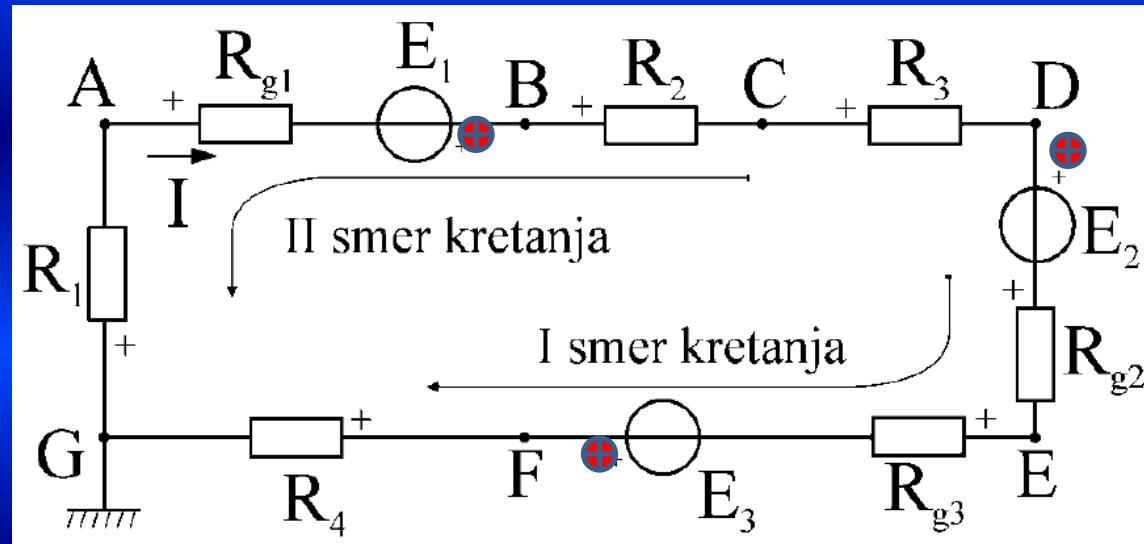
$$I = I_1 + I_2$$

$$U = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \Rightarrow I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} \Rightarrow I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$

Naponi i potencijali tačaka prostog električnog kola



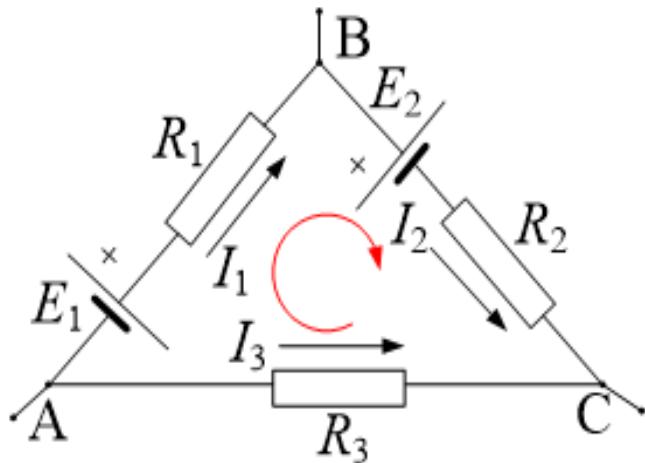
II Kirkohov zakon:

$$U_{AE} = +IR_{g1} - E_1 + IR_2 + IR_3 + E_2 + IR_{d2}$$

$$+IR_{g1} - E_1 + IR_2 + IR_3 + E_2 + IR_{d2} + IR_{g3} - E_3 + IR_4 + IR_1 = 0$$

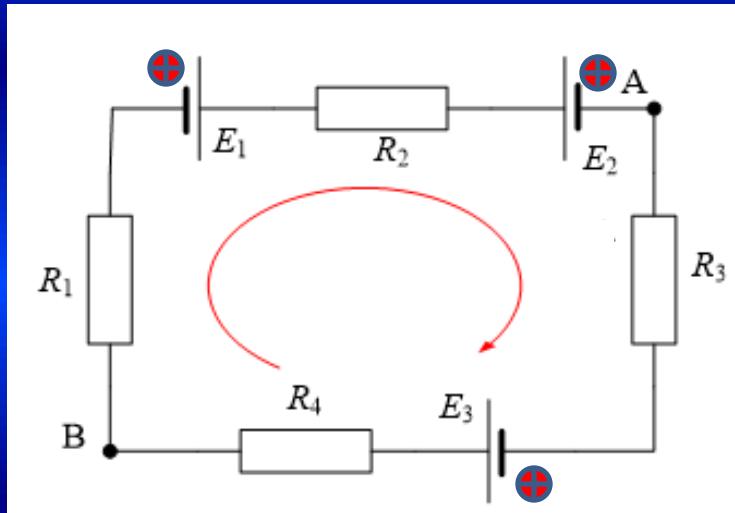
Sasvim uopšćeno kolo koje ima m grana i n izvora EMS:

$$\sum_{i=1}^n E_i - \sum_{k=1}^m R_k \cdot I_k = 0$$



$$E_1 - R_1 \cdot I_1 - E_2 - R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = 0$$

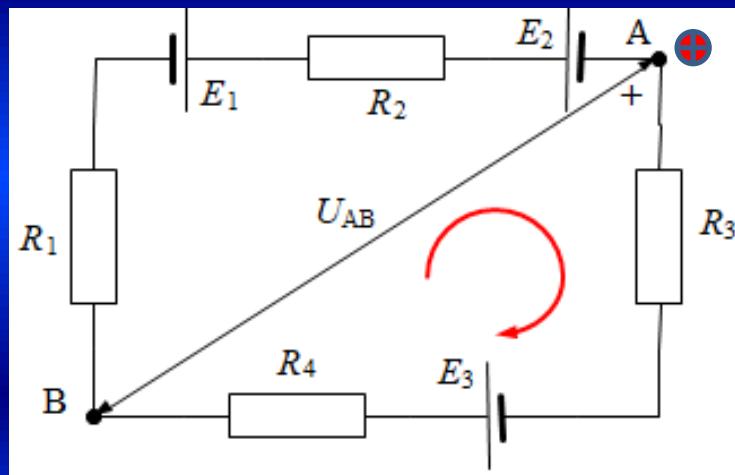
Za kolo prikazano na slici poznato je: $E_1 = 25 \text{ V}$, $E_2 = 5 \text{ V}$, $E_3 = 30 \text{ V}$, $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 150 \Omega$, $R_4 = 200 \Omega$, odrediti:
intenzitet električne struje u kolu i napon između tačaka A i B



$$R_1 \cdot I + E_1 + R_2 \cdot I - E_2 + R_3 \cdot I + E_3 + R_4 \cdot I = 0$$

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \cdot I = E_2 - E_1 - E_3$$

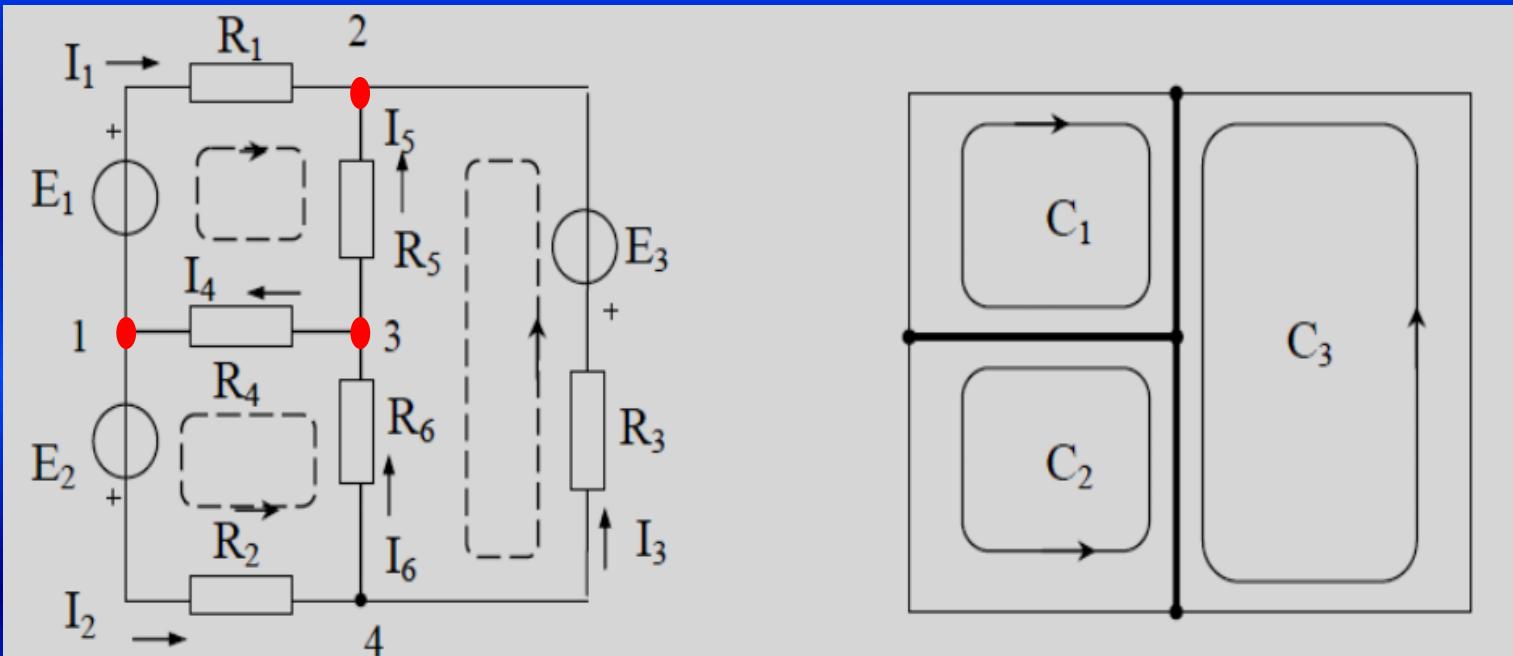
$$I = \frac{E_2 - E_1 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = -0,1 \text{ A}$$



$$U_{AB} + R_3 \cdot I + E_3 + R_4 \cdot I = 0$$

$$U_{AB} = -R_4 \cdot I - E_3 - R_3 \cdot I = 5 \text{ V}$$

Primer: Za kolo sa slike postaviti jednačine prvog i drugog Kirhofovog zakona (n_g – broj grana; n_c – broj kontura; $n_c - 1$ broj nezavisnih kontura; n_k – broj jednačina; C_N - kontura)



$$n_g = 6 \quad n_c = 4$$

$$n_c - 1 = 3 \quad n_k = 3$$

$$1. \quad I_1 + I_2 - I_4 = 0$$

$$C_1 \quad -E_1 + R_1 I_1 - R_5 I_5 + R_4 I_4 = 0$$

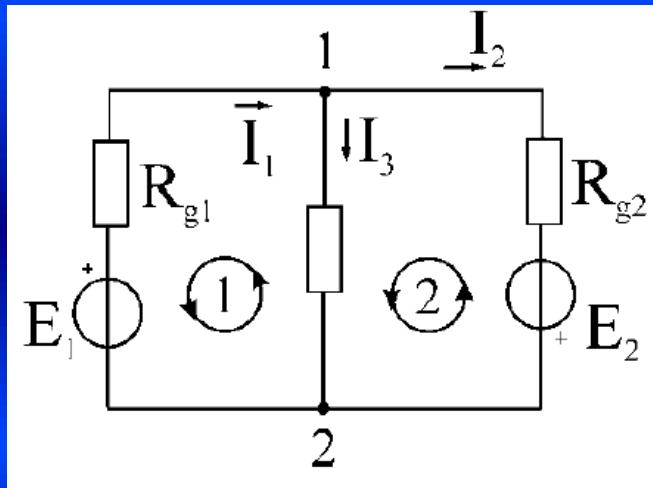
$$2. \quad -I_1 - I_3 - I_5 = 0$$

$$C_2 \quad -E_2 + R_2 I_2 + R_6 I_6 + R_4 I_4 = 0$$

$$4. \quad -I_2 + I_3 + I_6 = 0$$

$$C_3 \quad +E_3 - R_5 I_5 - R_6 I_6 + R_3 I_3 = 0$$

PRIMER: Izračunati jačine svih struja u granama električne mreže, prikazane na slici:



$$\text{I K.z., cvor 1: } -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Struje u čvoru 1 jednake strujama u čvoru 2

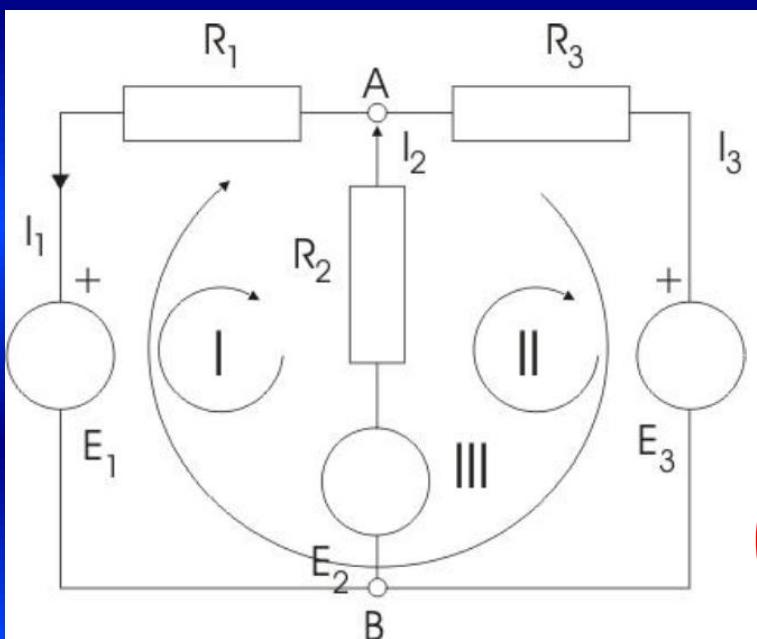
$$\text{II K.z. Kontura 1: } -E_1 + I_1 R_{g1} + I_3 R = 0$$

$$\text{II K.z. Kontura 2: } +E_2 - I_2 R_{g2} + I_3 R = 0$$

Jednačine čine sistem tri jednačine sa tri nepoznate vrednosti jačine struja u granama, I1, I2 i I3:

$$I_1 = \frac{-E_1(-R - R_{g2}) + E_2 R}{RR_{g1} + RR_{g2} + R_{g1} + R_{g2}} ; I_2 = \frac{E_1 R - E_2(-R - R_{g1})}{RR_{g1} + RR_{g2} + R_{g1} + R_{g2}} ; I_3 = \frac{-E_1(-R_{g2}) + E_2(-R_{g1})}{RR_{g1} + RR_{g2} + R_{g1} + R_{g2}}$$

Primer: Izračunati struje I_1 , I_2 u kolu sa slike. Podaci: $E_1=6V$, $E_2=12V$, $E_3=9V$, $R_1=1 \Omega$, $R_2=3 \Omega$, $R_3=4 \Omega$.



$$\text{Čvor A: } I_3 - I_1 - I_2 = 0$$

Od tri konture samo su dve nezavisne, pa su proizvoljno izabrane i orijentisane konture I i II, za koje pišemo jednačine po II KZ:

$$\text{I) } E_1 - R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 0$$

$$\text{II) } E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 + E_3 = 0$$

$$-I_1 + 3I_2 - 6 = 0 \text{ i}$$

$$-3I_2 + 4I_3 + 21 = 0$$

$$-I_1 + 3I_2 - 6 = 0$$

zamenimo

$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$-3I_2 + 4(I_1 + I_2) + 21 = 0 \Rightarrow 4I_1 - 7I_2 + 21 = 0$$

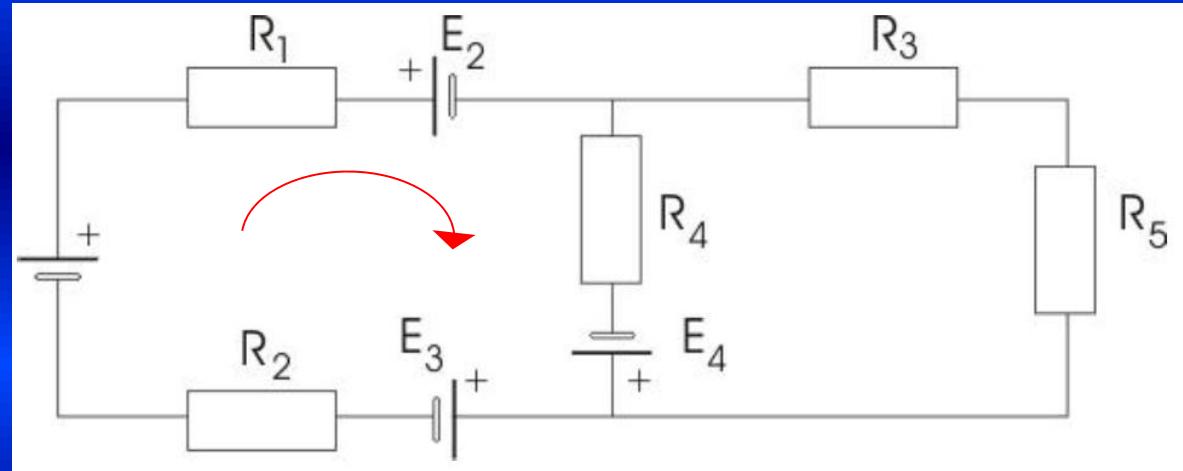
Prvu jednačinu pomnožimo sa 4 i saberemo sa drugom:

$$-19I_2 + 45 = 0,$$

$$I_2 = \frac{45}{19} = 2,37A$$

$$I_1 = 1,11A$$

Primer: Izračunati vrednost struje kroz otpornik $R_4=10\Omega$ i pad napona na njemu ako je poznato: $E_1=5V$, $E_2=10V$, $E_3=15V$, $E_4=2V$, $R_1=20\Omega$, $R_2=20\Omega$, $R_3=15\Omega$, $R_5=30\Omega$.



$$E_1 - E_2 + E_4 - E_3 = I_1(R_1 + R_4 + R_2) + R_4 I_2 \rightarrow -18 = 50I_1 + 10I_2$$

$$E_4 = I_2(R_5 + R_3 + R_4) + I_1 R_4 \rightarrow 2 = 55I_2 + 10I_1 \rightarrow I_1 = 0.2 - 5.5I_2$$

$$-1.8 = 5(0.2 - 5.5I_2) + I_2 = 1 - 38.5I_2 + I_2$$

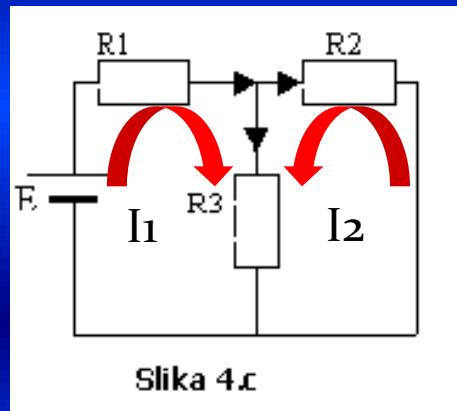
$$37.5I_2 = 2.8$$

$$I_2 = 0.0746A, I_1 = -0.210A$$

$$U_{R4} = E_2 - E_1 + E_3 - E_4 - I_1(R_1 + R_4 + R_2) = 18 - 10.5 = 7.5V$$

Princip uzajamnosti ili reciprociteta

- Princip uzajamnosti koga je definisao Kirhof kaže: Ako neka elektromotorna sila delujući u bilo kojoj grani pasivnog električnog kola proizvoljne konfiguracije stvara u drugoj grani struju I_1 , i ako se ta ista elektromotorna sila prenese u drugu granu, stvarat će u prvoj grani istu toliku struju.



$$E_1 - I_1R_1 - I_1R_3 - I_2R_3 = 0$$

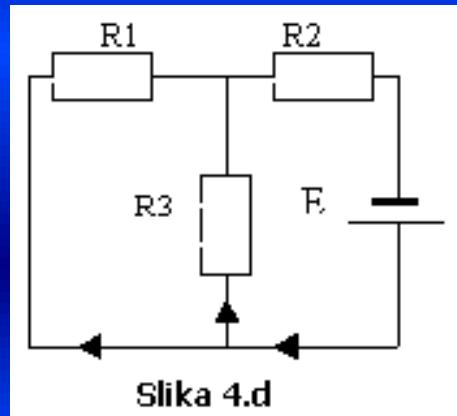
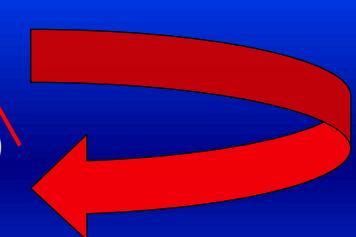
$$I_2R_2 + I_2R_3 - I_1R_3 = 0 \quad \rightarrow \quad I_2 = I_1R_3 / (R_2 + R_3)$$

zamenom dobijamo:

$$E_1 - I_1(R_1 + R_3) - I_1R_3 / (R_2 + R_3) = 0$$

$$I_1 = (R_2 + R_3)E_1 / (R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)$$

$$I_2' = R_3E_1 / (R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)$$



Sa Slike 4.d se dobija:

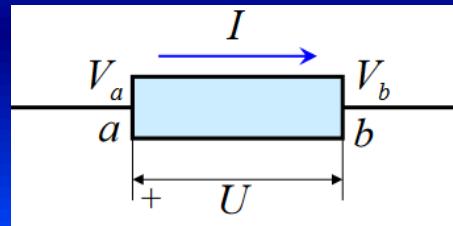
$$I_1' = R_3E_1 / (R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)$$

Pa je:

$$I_1' = I_2'$$

Džulov zakon

- **Džulov zakon** je fizički zakon koji pokazuje vezu između topline, koju stvara električna struja koja teče kroz provodnik. Dobio je ime po Džejmsu Džulu, koji je proučio ovaj fenomen 1840. Džulov zakon se ovako izražava:



Količina topline oslobođena u provodniku kroz koji protiče električna struja jednaka je proizvodu kvadrata jačine te električne struje, električnoj otpornosti tog otpornika i vremenu proticanja ove struje.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R$$

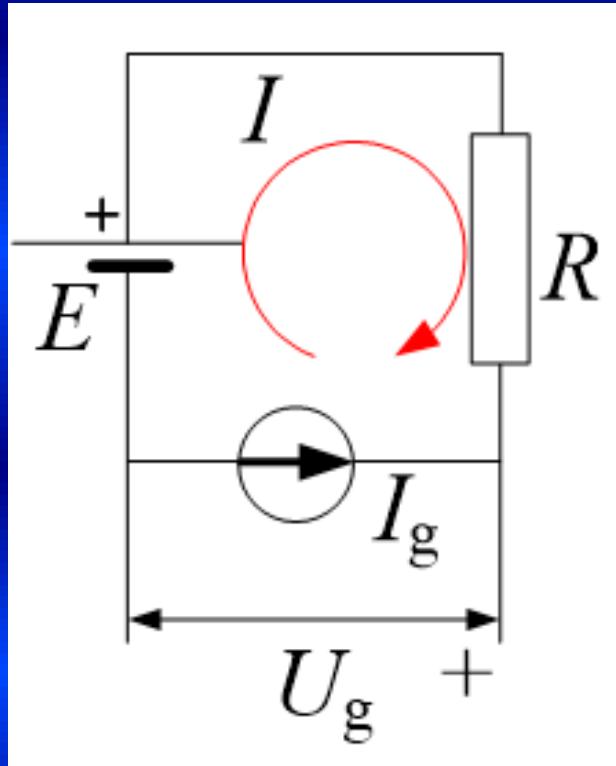
odnosno energijom

$$Q = U \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = P \cdot t$$

- Q - količina topline (u džulima)
- P - snaga (u vatima)
- U - električni napon struje
- I - električna struja
- R - Omov električni otpor
- t - Vreme mjerjenja ili vreme elementa pod strujom

$$P = R I^2 = \frac{U^2}{R}$$

Odrediti snage na svim elementima u kolu.



$$I = -I_g$$

$$P_E = E \cdot I = -E \cdot I_g$$

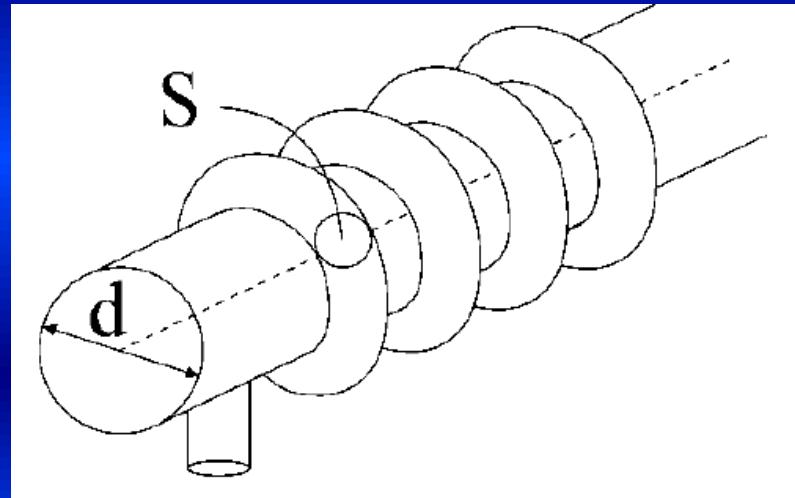
$$P_R = R \cdot I^2 = R \cdot I_g^2$$

$$P_{Ig} = U_g \cdot I_g$$

$$U_g = E + R \cdot I_g$$

$$P_{Ig} = (E + R \cdot I_g) \cdot I_g$$

PRIMER: Na šamotni cilindar prečnika $d = 0,5\text{cm}$ treba namotati otpornu žicu da bi se dobio otpornik otpornosti $R = 10 \Omega$. Na raspolaganju je otporna žica specifične otpornosti $\rho = 10 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$, poprečnog preseka $S = 1\text{mm}^2$. Izračunati potrebnu dužinu žice.



$$R = \rho \frac{l}{S} \quad l = \frac{R \cdot S}{\rho} = \frac{10 \cdot 10^{-8}}{10 \cdot 10^{-6}} = 1\text{m}$$