Лекција 7

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН (ДРУГИ ДЕО)

- ▶ Понашање функција: интервали монотоности функције
- ▶ Понашање функција: тачке екстремума, опадања и рашћења функције
- ▶ Понашање функција: интервали конвексности функције и превојне тачке
- ▶ Понашање функција: вертикалне и косе асимптоте
- ▶ Понашање функција: конструкција графика функције

7.1. Понашање функција: интервали монотоности функције

У овом и у следећих неколико поглавља бавићемо се основним својствима која нека функција може или не мора да поседује, а која је неопходно утврдити пре него што приступимо конструкцији графика дате функције. Први од тих неопходних елемената за конструкцију графика су такозвани интервали монотоности функције. Подсетимо се стога следеће дефиниције.

Функција f, дефинисана на отвореном интервалу (a, b), *расте* [*опада*] на (a, b), ако је $f(x_1) \leq f(x_2)$ $[f(x_1) \geq f(x_2)]$, а *строго расте* [*строго опада*] на (a, b) ако је $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$ за свако $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$.

Теорема 1. *Диференцијабилна функција f на интервалу (a, b) расте [опада] ако и само ако је $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ за свако $x \in (a, b)$.*

Ако је $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ за свако $x \in (a, b)$, онда функција f строго расте [опада] на датом интервалу.

Доказ. Ако функција f расте [опада] на (a, b), то за свако $x_0 \in (a, b)$ и за свако $\Delta x > 0$ имамо

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0 \quad [\Delta y \leq 0].$$

Али тада је $\Delta y / \Delta x \geq 0$ $[\Delta y / \Delta x \leq 0]$. Одавде је

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \quad \left[f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \right].$$

Обрнуто претпоставимо да је $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$ за свако $x \in (a,b)$. Нека је $a < x_1 < x_2 < b$. Тада из Лагранжове теореме следи да постоји $\xi \in (x_1, x_2)$ тако да је

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

тј. $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Други део теореме следи из последице 6.3. $\square$

Пример 1. Нека је дат полином n-тог степена, $n > 1$, са реалним коефицијентима

$$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Треба показати да постоји позитиван број M такав да је на интервалима $(-\infty, -M)$ и $(M, +\infty)$ функција $f(x)$ строго монотона.

Посматрајмо полином $f'(x)$. Ако он нема реалних нула, онда $f'(x)$ не мења знак на скупу $\mathbf{R}$ и функција $f(x)$ строго расте или строго опада на читавом интервалу $(-\infty, +\infty)$, па за број M можемо узети произвољан позитиван број.

Ако $f'(x)$ има реалне нуле, рецимо, $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $m \leq n-1$, онда узмимо M такво да је $|x_i| \leq M$ за свако $i \in \overline{n-1}$. На интервалима $(-\infty, -M)$ и $(M, +\infty)$ функција $f'(x)$ не мења знак, па је на њима функција $f(x)$ строго монотона. $\square$

7.2. Понашање функција: тачке екстремума, опадања и рашћења функције

Подсетимо се следеће дефиниције. Нека је функција дефинисана у некој околини тачке x_0. Тачка x_0 је тачка *рашћења* [*опадања*] функције f, ако постоји $\delta > 0$ такво да је $f(x) < f(x_0)$ $[f(x_0) < f(x)]$ за свако $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f(x_0) < f(x)$ $[f(x) < f(x_0)]$ за свако $x < x < x_0 + \delta$.

Не мора свака тачка у чијој околини је дата функција дефинисана да буде тачка рашћења, опадања или тачка екстремума те функције. Као пример може послужити тачка $x = 0$ за функцију

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ако је } x \neq 0, \\ 0, & \text{ако је } x = 0. \end{cases}$$

Следећа теорема даје довољан услов да дата тачка буде тачка рашћења, опадања или тачка екстремума задате функције.

Теорема 2. *Нека у тачки* x_0 *функција* f *има изводе до реда* $n \geq 1$ *закључно, и нека је* $f^{(i)}(x_0) = 0$ *за свако* $i \in \overline{n-1}$ *и* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тада, ако је* n *паран број, тј.* $n = 2k$, x_0 *је тачка строгог екстремума функције* f *и то: ако је* $f^{(2k)}(x_0) < 0$, *тачка* x_0 *је строги локални максимум, а ако је* $f^{(2k)}(x_0) > 0$, *тачка* x_0 *је строги локални минимум. Ако је* n *непаран број, тј.* $n = 2k-1$, *онда у случају да је* $f^{(2k-1)}(x_0) > 0$, *тачка* x_0 *је тачка рашћења, а у случају да је* $f^{(2k-1)}(x_0) < 0$, *тачка* x_0 *је тачка опадања функције.*

Докажимо прво једну лему.

Лема 1. *Ако је* $\beta(x) = o(\alpha(x))$, $x \to x_0$, *онда постоји* $\delta > 0$ *такво да за свако* $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ *важи неједнакост* $|\beta(x)| \leq (1/2)\,|\alpha(x)|$.

Доказ. Ако је $\beta(x) = o(\alpha(x))$, $x \to x_0$, онда је $\beta(x) = \varepsilon(x)\,\alpha(x)$ за свако x из неке шупље околине $\dot{U}(x_0, \delta')$ тачке x_0, где је $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Но из $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ следи да постоји $\delta > 0$, $\delta < \delta'$, такво да за свако $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ важи неједнакост $|\varepsilon(x)| < 1/2$, па за свако $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ имамо

$$|\beta(x)| = |\varepsilon(x)\,\alpha(x)| \leq \frac{1}{2}\,|\alpha(x)|. \square$$

Доказ теореме 2. Тејлорова формула у тачки $x = x_0$ са остатком у Пеановом облику гласи

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \alpha(\Delta x), \tag{1}$$

где је $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x^n)$ када $\Delta x \to 0$. Како је $\alpha(x) = o(\Delta x^n)$, то је и

$$\alpha(\Delta x) = o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right)$$

када $\Delta x \to 0$. Али тада из леме 1 следи да постоји $\delta > 0$ такво важи неједнакост

$$|\alpha(x)| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right|$$

ако је $0 < |\Delta x| < \delta$. Сада добијамо да за свако $|\Delta x| \in (0, \delta)$ знак од Δf зависи само од првог члана у суми са десне стране једнакости (1), тј.

$$\operatorname{sgn}(\Delta f) = \operatorname{sgn}\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right). \tag{2}$$

Ако је $n = 2k$, тада из (2) следи да је $\operatorname{sgn}(\Delta f) = \operatorname{sgn}(f^{(n)}(x_0))$. Одавде следи да ако је $f^{(n)}(x_0) > 0$ онда је $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$, тј. $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ за свако $|\Delta x| \in (0, \delta)$ и функција f у тачки x_0 има строги локални минимум. Ако је $f^{(n)}(x_0) < 0$, онда је $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ за свако $|\Delta x| \in (0, \delta)$, и функција f у тачки x_0 има строги локални максимум.

Претпоставимо сада да је $n = 2k - 1$. Тада из (2) следи да је $\operatorname{sgn}(\Delta f) = \operatorname{sgn}(\Delta x)\operatorname{sgn}(f^{(2k-1)}(x_0))$, па ако је $f^{(2k-1)}(x_0) > 0$, онда је x_0 тачка рашћења, а ако је $f^{(2k-1)}(x_0) < 0$, онда је x_0 тачка опадања функције. $\square$

7.3. Понашање функција: интервали конвексности функције и превојне тачке

Сваки подскуп од $\mathbf{R}^2$ зовемо (равном) фигуром. Фигура $\Phi \subseteq \mathbf{R}^2$ је *конвексна* ако за свако $M, N \in \Phi$ свака тачка дужи $\overline{MN}$, дужи са крајевима у тачкама M и N, припада Φ.

Нека је функција f дефинисана на отвореном интервалу (a, b). Скуп

$$G_f^+(a, b) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in (a, b) \text{ и } y \geq f(x)\}$$

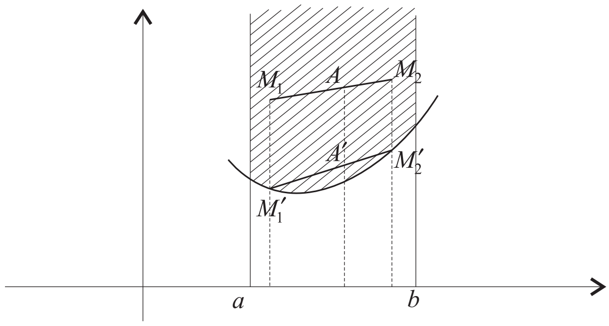
се зове *надграфиком* функције f на интервалу (a, b), а скуп

$$G_f^-(a, b) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in (a, b) \text{ и } y \leq f(x)\}$$

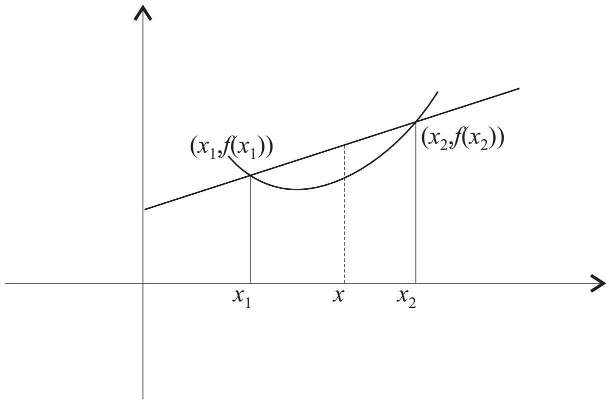
се зове *подграфиком* функције f на интервалу (a, b). Кажемо да је функција f *конвексна на доле* [*на горе*] на интервалу (a, b), ако је њен надграфик [подграфик] на (a, b) конвексна фигура.

Ако желимо да покажемо да је функција f заиста конвексна на доле на интервалу (a, b), онда треба узети произвољне две тачке

$M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ скупа $G_f^+(a, b)$ и показати да произвољна



тачка $A \in \overline{M_1M_2}$ такође припада $G_f^+(a, b)$. Уочимо такође тачке $M_1'(x_1, f(x_1))$ и $M_2'(x_2, f(x_2))$ (види слику). Услов $A' \in G_f^+(a, b)$ повлачи, очигледно, услов $A \in G_f^+(a, b)$, па стога следи да је довољно за утврђивање конвексности на доле дате функције показати да дужи са крајевима на графику функције f припадају њеном надграфику. С друге стране ако хоћемо да покажемо да дуж $\overline{M_1'M_2'}$ са крајевима на графику припада надграфику функције, довољно је показати да за свако $A(x, y) \in \overline{M_1'M_2'}$ важи да је $y \geq f(x)$. Ово разматрање нас наводи на мисао да дефинишемо појам конвесности на доле [горе] на следећи начин.



Нека је функција f дефинисана на отвореном интервалу (a, b), и нека је $a < x_1 < x_2 < b$. Лако је проверити да је једначином

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

одређена права која пролази кроз тачке $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$. Наиме, ако са $l(x)$ означимо десну страну ове једначине, онда је $l(x_1) = f(x_1)$ и $l(x_2) = f(x_2)$.

Кажемо да је функција f *конвексна на горе* [*на доле*] *на интервалу* (a, b), ако за сваке две тачке x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, и свако $x_0 \in (x_1, x_2)$ важи неједнакост $l(x_0) \le f(x_0)$ $[f(x_0) \le l(x_0)]$; ако у претходној неједнакости уместо знака $\le$ стоји знак $<$ онда кажемо да је функција f *строго конвексна на горе* [*на доле*] на датом интервалу. Сваки интервал на коме је функција конвексна [строго конвексна] на горе, респективно, конвексна [строго конвексна] на доле, зове се *интервал конвексности* [*строге конвексности*] *на горе*, респективно, *интервал конвексности* [*строге конвексности*] *на доле* дате функције.

Пример 2. Покажимо по дефиницији да је функција $y = x^4$ строго конвексна на доле на читавом $\mathbf{R}$. Треба показати да је

$$\frac{x_2^4(x - x_1) + x_1^4(x_2 - x)}{x_2 - x_1} > x^4, \quad \text{тј.} \quad x(x_2^4 - x_1^4) - x_2(x^4 - x_1^4) - x_1(x_2^4 - x^4) > 0\,,$$

за свако $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ и за свако $x \in (x_1, x_2)$. И заиста, добијамо

$$\begin{aligned}
&x(x_2^4 - x_1^4) - x_2(x^4 - x_1^4) - x_1(x_2^4 - x^4) = \\
&\quad = x(x_2^4 - x^4 + x^4 - x_1^4) - x_2(x^4 - x_1^4) - x_1(x_2^4 - x^4) = \\
&\quad = (x - x_1)(x_2^4 - x^4) + (x - x_2)(x^4 - x_1^4) = \\
&\quad = (x - x_1)(x_2 - x)[(x_2 + x)(x_2^2 + x^2) - (x + x_1)(x^2 + x_1^2)] = \\
&\quad = (x - x_1)(x_2 - x)(x_2^3 + x_2x^2 + xx_2^2 - xx_1^2 - x_1x^2 - x_1^3) = \\
&\quad = (x - x_1)(x_2 - x)[(x_2 - x_1)x^2 + (x_2^2 - x_1^2)x + (x_2^3 - x_1^3)].
\end{aligned}$$

Приметимо да је за квадратни трином

$$f(x) = (x_2 - x_1)\,x^2 + (x_2^2 - x_1^2)\,x + (x_2^3 - x_1^3)$$

дискриминанта

$$\begin{aligned}
(x_2^2 - x_1^2)^2 - 4(x_2 - x_1)(x_2^3 - x_1^3) &= (x_2 - x_1)^2[(x_2 + x_1)^2 - \\
&\quad - 4(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2)] = (x_2 - x_1)^2(-3x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2) = \\
&= -(x_2 - x_1)^2[2x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 + x_2)^2] < 0,
\end{aligned}$$

па пошто је $x_2-x_1>0$, то је $f(x)>0$ за свако $x\in(x_1,x_2)$. Одавде напокон добијамо да је

$$(x-x_1)(x_2-x)[(x_2-x_1)x^2+(x_2^2-x_1^2)x+(x_2^3-x_1^3)]>0$$

за свако $x\in(x_1,x_2)$, што смо и требали да покажемо. $\square$

Приметимо да једначину праве одређену релацијом (3) можемо написати у следећем облику

$$y=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2). \tag{4}$$

Тада услов конвексности на доле гласи

$$f(x)\leq\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2), \tag{5}$$

или дат у симетричнијој форми

$$(x_2-x)f(x_1)+(x_1-x_2)f(x)+(x-x_1)f(x_2)\geq 0.$$

Последњу неједнакост можемо написати и у еквивалентном облику (имамо у виду да је $x_1<x<x_2$):

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{6}$$

Стављајући уместо знака $\leq$ у последњој неједнакости знаке $\geq$, $<$ и $>$ добијамо, редом, одговарајуће неједнакости за конвексност на горе, строгу конвексност на доле и строгу конвексност на горе.

Теорема 3. *Ако је функција $f(x)$, диференцијабилна на интервалу (a,b), конвексна на доле [горе], онда за свако $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$, важе неједнакости*

$$f'(x_1)\leq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\quad\text{и}\quad\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_2) \tag{7}$$

$$\left[f'(x_1)\geq\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\quad\text{и}\quad\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq f'(x_2)\right].$$

Доказ. Посматрајмо случај конвексне на доле функције. Нека је $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тада узимајући лимес леве и десне стране у неједнакости (6), и то, прво када $x \to x_1+0$, а затим када $x \to x_2-0$, добијамо да је

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2),$$

што је и требало да се покаже. □

Теорема 4. *Диференцијабилна на интервалу (a,b) функција $f(x)$ је конвексна на доле [на горе] ако и само ако је функција $f'(x)$ неопадајућа [нерастућа].*

Доказ. Размотримо случај конвексне на доле функције (слично се разматра случај конвексне на горе функције). Из претходне теореме одмах следи да је функција $f'(x)$ неопадајућа.

Претпоставимо сада да је функција $f'(x)$ неопадајућа. На сваки од интервала $[x_1, x]$ и $[x, x_2]$ може се применити Лагранжова теорема, па постоје $\eta \in (x_1, x)$ и $\xi \in (x, x_2)$ такви да је

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\eta) \quad \text{и} \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi).$$

Како је $\eta < \xi$, то је $f'(\eta) \leq f'(\xi)$, и ми добијамо неједнакост (6), па је функција $f(x)$ заиста конвексна на доле. □

Из претходне теореме и теореме 1 следи тврђење:

Последица 1. *Нека функција $f(x)$ има други извод на интервалу (a,b). Тада је $f''(x) \geq 0$ $[f''(x) \leq 0]$ на интервалу (a,b) акко је функција $f(x)$ конвексна на доле [горе]. Ако је $f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0]$ на интервалу (a,b), онда је функција $f(x)$ строго конвексна на доле [горе].*

Пример 3. Функција $y = a^x$ је строго конвексна на доле на интервалу $(-\infty, +\infty)$, јер је $y'' = (\ln a)^2\, a^x > 0$ за свако $x \in (-\infty, +\infty)$.

Следећа теорема описује однос графика диференцијабилне конвексне на горе [на доле] функције и његове тангенте у произвољној његовој тачки.

Теорема 5. *Функција $f(x)$ има на интервалу (a,b) коначан први извод $f'(x)$. Тада је функција $f(x)$ конвексна на доле [горе] на интервалу (a,b) акко за произвољно $x_0 \in (a,b)$ тачке $(x, f(x))$, $x \in (a,b)$,*

$x \neq x_0$, графика дате функције леже изнад [испод] тангенте графика у тачки $(x_0, f(x_0))$.

Доказ. Разматрајмо случај конвексне на доле функције. Једначина тангенте графика функције f у тачки $(x_0, f(x_0)$ је

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Приметимо да је услов

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

за свако $x \in (a, b)$ еквивалентан следећим двема неједнакостима

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{8}$$

за свако $x \in (x_0, b)$ и

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \tag{9}$$

за свако $x \in (a, x_0)$.

Узмимо сада произвољне $x_1, x_2 \in (a, b)$ тако да је $x_1 < x_0 < x_2$. Тада, ако узмемо у (8) да је $x = x_2$, а у (9) да је $x = x_1$, добијамо

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad \text{и} \quad f'(x_0) \geq \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

Одавде следи да је

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

т.ј. важи (6), па је функција $f(x)$ конвексна на доле.

Претпоставимо сада да је функција конвексна на доле. Ако у првој неједнакости из (7) узмемо да је $x_1 = x_0$ и $x_2 = x$, где је $x \in (x_0, b)$, добијамо неједнакост (8). А ако у другој неједнакости из (7) узмемо да је $x_2 = x_0$ и $x_1 = x$, где је $x \in (a, x_0)$, добијамо неједнакост (9). Дакле важи да је

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

за свако $x \in (a,b)$. $\square$

Последица 2. *Функција $f(x)$, диференцијабилна на интервалу (a,b), је строго конвексна на доле [на горе] на (a,b) акко за произвољно $x_0 \in (a,b)$ тачке $(x, f(x))$, $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$, графика дате функције леже строго изнад [испод] тангенте графика у тачки $(x_0, f(x_0)$.*

Доказ. Размотримо случај строго конвексне на доле функције. Као у претходној теореми, можемо показати да из услова да за произвољно $x_0 \in (a,b)$ тачка $(x, f(x))$, $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$, графика дате функције лежи строго изнад тангенте графика у тачки $(x_0, f(x_0))$ следи да је функција строго конвексна на доле.

Претпоставимо, сада, да је функција строго конвексна на доле. Из претходне теореме тада следи да је график функције $y = f(x)$ изнад тангенте у тачки $(x_0, f(x_0)$ на график ове функције. Претпоставимо сада, рецимо, да постоји тачка x_2 таква да је тачка $(x_2, f(x_2))$ такође на уоченој тангенти. Али тада је ова тангента и сечица за дату криву, па график функције на интервалу $[x_0, x_2]$ лежи на уоченој тангенти. Одавде следи да функција није строго конвексна на доле. $\square$

У формули (4) означимо

$$\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Приметимо да за свако x_1, x_2 и x са интервала (a,b), где је $x_1 \leq x \leq x_2$, очигледно, важи да је $\lambda_1 \geq 0$ и $\lambda_2 \geq 0$, и да је

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1.$$

Такође приметимо да је

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \frac{(x_2 - x)x_1 + (x - x_1)x_2}{x_2 - x_1} = x,$$

па услов (5), конвексности на доле функције f на интервалу (a,b), можемо дати у облику

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), \tag{10}$$

и при томе он важи за свако $x_1, x_2 \in (a,b)$ и за све реалне λ_1 и λ_2 такве да је $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (приметимо да услов (5) важи и када је $x = x_1$ или $x = x_2$); при томе ако једнакост у (10) важи тада и само тада када је $x_1 = x_2$ или $\lambda_1\lambda_2 = 0$, онда је функција f строго конвексна на датом интевалу. Заменом у (10) знака $\geq$ са $\leq$ добијамо одговарајући услов за конвексност и строгу конвексност на горе.

Пример 4. Покажимо по дефиницији да је функција $y = |x|$ конвексна на доле на $\mathbf{R}$. Како важи

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2| \leq |\lambda_1|\,|x_1| + |\lambda_2|\,|x_2| = \lambda_1\,|x_1| + \lambda_2\,|x_2|$$

за свако $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ и свако $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, то је функција $y = |x|$ заиста конвексна на доле. $\Box$

Пример 5. Нека је функција $y = f(x)$ конвексна на доле на интервалу (a,b), функција $z = g(y)$ растућа и конвексна на доле на интервалу (c,d), а $f[(a,b)] \subseteq (c,d)$. Тада је функција $g(f(x))$ конвексна на доле на интервалу (a,b). Заиста, нека су $x_1, x_2 \in (a,b)$, и λ_1 и λ_2 такви да је $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Функција $f(x)$ је конвексна на доле, па је

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Функција $g(y)$ је растућа, па из последње неједнакости следи да је

$$g[f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] \leq g[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)].$$

Из конвексности на доле функције $g(y)$ следи да је

$$g[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)] \leq \lambda_1 g[f(x_1)] + \lambda_2 g[f(x_2)].$$

Из последње две неједнакости имамо да је

$$g[f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] \leq \lambda_1 g[f(x_1)] + \lambda_2 g[f(x_2)],$$

што је и требало да се покаже. $\Box$

Теорема 6. [Јангова неједнакост] *Ако је $p > 1$ и $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, онда за произвољне ненегативне реалне бројеве y и z важи да је*

$$\frac{y^p}{p} + \frac{z^q}{q} \geq yz;$$

[0]W.H. Young (1863–1942) — енглески математичар

при чему једнакост у датој релацији важи акко је $y^p = z^q$.

Доказ. Функција $y = a^x$ је строго конвексна на доле на интервалу $(-\infty, +\infty)$, па из (10) следи да је

$$\lambda_1 a^{x_1} + \lambda_2 a^{x_2} \geq a^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} = a^{\lambda_1 x_1} a^{\lambda_2 x_2}$$

за свако $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ и за све реалне λ_1 и λ_2 такве да је $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (једнакост у овој неједнакости важи акко је $x_1 = x_2$ или $\lambda_1 \lambda_2 = 0$). Нека је $\lambda_1 = 1/p$ и $\lambda_2 = 1/q$. Сада, ако узмемо да је $y = a^{\lambda_1 x_1}$ и $z = a^{\lambda_2 x_2}$, онда је $a^{x_1} = y^p$ и $a^{x_2} = z^q$, па горе наведена неједнакост се може написати у облику

$$\frac{y^p}{p} + \frac{z^q}{q} \geq yz,$$

и она важи, очигледно, за свако $y \geq 0$ и $z \geq 0$, при чему једнакост у њој важи акко је $y^p = z^q$. $\square$

Теорема 7. [Хелдерова[1] неједнакост] *Нека је $p > 1$ и $q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, и нека су $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ позитивни реални бројеви, тада је*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q}.$$

Доказ. Узмимо да је

$$u_i = \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p}} \quad \text{и} \quad v_i = \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q}}$$

за свако $i \in \overline{n}$. Тада из Јангове неједнакости имамо да за свако $i \in \overline{n}$ важи

$$u_i v_i = \frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p}} \cdot \frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q} \leq \frac{u_i^p}{p} + \frac{u_i^q}{q}$$

Саберимо свих n неједнакости и добићемо да је

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

[1] O. Hölder (1859–1937) — немачки математичар

одакле, очигледно следи тражена неједнакост. □

Једнакост у Хелдеровој неједнакости, очигледно, важи, акко је за свако i задовољено

$$\frac{x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p} = \frac{y_i^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}, \quad \text{тј.} \quad \frac{x_1^p}{y_1^q} = \frac{x_2^p}{y_2^q} = \cdots = \frac{x_n^p}{y_n^q}.$$

Ако су $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ произвољни бројеви, онда из Хелдерове неједнакости следи да важи

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Из Хелдерове следи Коши-Шварцова[2] неједнакост (Коши-Буњаковски неједнакост):

$$|x_1y_1 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

за свако $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$; једнакост у последњој неједнакости важи акко је

$$\left|\frac{x_1}{y_1}\right| = \left|\frac{x_2}{y_2}\right| = \cdots = \left|\frac{x_n}{y_n}\right|$$

Теорема 8. [неједнакост Минковског[3]] *Нека су $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ позитивни реални бројеви и $p > 1$, тада важи да је*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right]^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p};$$

једнакост важи акко је

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$$

Доказ. Приметимо да важи

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1}.$$

[2]K.H.A. Schwarz (1843–1921) — немачки математичар

[3]Hermann Minkowski (1864–1909) — немачки математичар

Нека је q такво да је $1/p + 1/q = 1$. Тада је очигледно $q > 1$ и $p + q = pq$, односно, $p = q(p-1)$. Из Хелдерове неједнакости тада следе неједнакости

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Из ове две неједнакости сабирањем добијамо

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}\right] \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/q}.$$

Узимајући у обзир да је $1/p + 1/q = 1$, дељењем са другим изразом са десне стране обе стране последње неједнакости, добијамо тражену неједнакост. $\square$

Теорема 9. [Јенсенова[4] неједнакост] *Нека је функција* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ *конвексна на доле и нека су* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *ненегативни реални бројеви такви да је* $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. *Тада је*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

за произвољне тачке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *са интервала* (a, b)*; једнакост важи акко је* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ *или* $\lambda_i = 1$ *за неко* $i \in \overline{n}$.

Доказ. Неједнакост се доказује применом математичке индукције. За $n = 2$ важи, јер је тврђење за $n = 2$ еквивалентно тврђењу да је f конвексна на доле функција, тј.

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

Претпоставимо да тврђење важи за n и покажимо да важи за $n+1$. Нека је $\lambda_i \geq 0$ за свако $i \in \overline{n+1}$ и нека је $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. Тада је

$$\frac{\lambda_2}{\mu} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\mu} + \frac{\lambda_{n+1}}{\mu} = 1$$

за $\mu = \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1}$. Приметимо да је $\lambda_1 + \mu = 1$ и, очигледно, важи

$$a < x_2' = \frac{\lambda_2}{\mu} x_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\mu} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\mu} x_{n+1} < b,$$

[4] Johan Jensen (1859–1925) — дански математичар

па важи

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \mu x_2') \leq \lambda_1 f(x_1) + \mu f(x_2') \leq \lambda_1 f(x_1) + \\ + \mu f\left(\frac{\lambda_2}{\mu} x_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\mu} x_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\mu} x_{n+1}\right) \leq \\ \leq \lambda_1 f(x_1) + \mu\left(\frac{\lambda_2}{\mu} f(x_2) + \cdots + \frac{\lambda_n}{\mu} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\mu} f(x_{n+1})\right) \leq \\ \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \square \end{aligned}$$

Тврђење, аналогно тврђењу последње теореме, важи и за конвексне функције на горе.

Пример 6. Покажимо неједнакост

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$$

за $\lambda_i \geq 0$, $i \in n$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ и $x_i \geq 0$, $i \in \overline{n}$; једнакост важи акко је $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ или $\lambda_i = 1$ за неко $i \in \overline{n}$.

Ако је $x_i = 0$ за неко $i \in \overline{n}$, онда неједнакост очигледно важи. Претпоставимо стога да је $x_i > 0$ за свако $i \in \overline{n}$. Функција $y = e^x$ је конвексна. Узмимо да је $y_i = \ln x_i$, $i \in \overline{n}$. Тада важи

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i\right) = f\left[\ln(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n})\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\ln x_i),$$

односно,

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} = e^{\ln(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n})} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\ln x_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i. \square$$

Нека је функција $f(x)$ дефинисана у некој околини тачке x_0. Кажемо да је тачка x_0 *превојна тачка функције* $f(x)$, а тачка $(x_0, f(x_0))$ *превојна тачка графика* функције $f(x)$, ако постоје тачке x_1 и x_2, $x_1 < x_0 < x_2$, такве да је функција на једном од интервала (x_1, x_0) и (x_0, x_2) конвексна на доле [на горе], а на другом конвексна на горе [на доле].

Напомена. У литератури се могу наћи и друге дефиниције превојне тачке. Рецимо у [...] превојна тачка се дефинише на следећи начин. Нека је функција f диференцијабилна у тачки $x = x_0$ и нека је $y = L(x)$ једначина тангенте графика функције f у тачки $(x_0, f(x_0))$. Ако функција $f(x) - L(x)$ мења знак при пролазу аргумента кроз x_0, онда кажемо да је тачка x_0 *превојна тачка функције* f, а тачка $(x_0, f(x_0))$ *превојна тачка графика* функције f.

Следећа теорема "грубо скицира" структуру скупа на коме је диференцијабилна функција конвексна на доле, односно, на горе.

Теорема 10. *Нека је функција $f(x)$ диференцијабилна на интервалу (a, b). Ако је за неко $c \in (a, b)$ на интервалима (a, c) и (c, b) она конвексна на доле [на горе], тада је функција $f(x)$ конвексна на доле [на горе] на читавом интервалу (a, b).*

Доказ. Претпоставимо да је функција $f(x)$ конвексна на доле на интервалима (a, c) и (c, b) (случај када је она на овим интервалима конвексна на горе се слично разматра). Из теореме 4 тада следи да је функција $f'(x)$ на интервалима (a, c) и (c, b) неопадајућа. Узмимо $x_1 \in (a, c)$ и $x_2 \in (c, b)$. Тада је

$$f'(x_1) \leq f'(c-0) = f'_-(c) = f'(c) = f'_+(c) = f'(c+0) \leq f'(x_2);$$

овде смо применили последицу 6.3 и теореме 8.26 и 4.1. Дакле, функција $f'(x)$ је неопадајућа на читавом интервалу (a, b), па, поново, из теореме 4 следи да је она конвексна на доле на овом интервалу. $\square$

Следећа теорема даје један неопходан услов за постојање превојне тачке.

Теорема 11. *Ако функција f у својој превојној тачки x_0 има непрекидан други извод, онда је $f''(x_0) = 0$.*

Доказ. Ако је $f''(x_0) > 0$ $[f''(x_0) < 0]$, онда због непрекидности функције $f''(x)$ постоји околина $U(x_0)$ таква да је у њој $f''(x) > 0$ $[f''(x) < 0]$. Сада из последице 1 следи да је функција у овој околини строго конвексна на доле [на горе], па тачка x_0 није превојна тачка дате функције. $\square$

Кажемо да функција $f(x)$, необавезно дефинисана у тачки x_0, мења знак при проласку аргумента кроз тачку x_0, ако постоји шупља околина $\dot{U}(x_0, \varepsilon)$ тачке x_0 таква да је $f(x) < 0$ $[f(x) > 0]$ за свако $x \in (x_0-\varepsilon, x_0)$, а $f(x) > 0$ $[f(x) < 0]$ за свако $x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$. Наведимо сада два довољна услова за постојање превојне тачке.

Теорема 12. *Ако је функција $f(x)$, дефинисана у тачки x_0, два пута диференцијабилна у некој шупљој околини $\dot{U}(x_0, \delta)$ тачке x_0 и при томе функција $f''(x)$ мења знак при проласку аргумента кроз тачку x_0, онда је тачка x_0 превојна тачка функције f.*

Доказ. Следи из дефиниције превојне тачке и последице 1. $\square$

Теорема 13. *Ако је $f''(x_0)=0$ и $f^{(3)}(x_0)\neq 0$; онда је x_0 превојна тачка функције f.*

Доказ. Ако је $f^{(3)}(x_0)\neq 0$, онда из леме 6.1 следи да је x_0 тачка рашћења или опадања функције $f''(x)$. Сада, како је $f''(x_0)=0$, то функција $f''(x)$ мења знак при проласку аргумента кроз тачку x_0, па тврђење следи из претходне теореме. $\square$

7.4. Понашање функција: вертикалне и косе асимптоте

Кажемо да функција $f(x)$ *узима бесконачну вредност* у некој тачки a, где је a или реалан број x_0, или један од коначних елемената x_0-0 или x_0+0, ако је функција дефинисана у некој шупљој околини тачке a и ако је или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$. Очигледно да функција у тој тачки има прекид друге врсте. Ако је наведени услов задовољен, онда праву $x=x_0$ зовемо *вертикална асимптота* за криву $y=f(x)$.

Пример 7. Рецимо, хипербола $y=1/x$ и функција $y=\log_a x$ имају вертикалну асимптоту $x=0$, а функција $y=\operatorname{tg} x$ има бесконачно много вертикалних асимптота — права $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ за свако цело k је асимптота за ову функцију. $\square$

Посматрајмо сада функцију која је дефинисана у околини тачке $-\infty$ или $+\infty$. Нека је, рецимо, функција $y=f(x)$ дефинисана у околини тачке $+\infty$. Права $y=ax+b$ је *коса асимптота* (у $+\infty$) криве задате једначином $y=f(x)$, ако је растојање $\rho(x)$ тачке $(x,f(x))$ на кривој од праве $y=ax+b$ такво да важи

$$\lim_{x\to+\infty}\rho(x)=0. \tag{11}$$

Није тешко приметити да је $\rho(x)=|(ax+b)-f(x)|\cos\alpha$, где је α угао који права $y=ax+b$ затвара са x-осом, па је услов (11) еквивалентан услову

$$\lim_{x\to+\infty}(y-ax-b)=0. \tag{12}$$

Али ако је испуњен услов (12), онда је

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y-ax-b}{x} = 0,$$

па је

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{y-ax-b}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+b}{x} = a.$$

Из (12) непосредно следи и да важи $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-ax) = b$. Дакле услови

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = a \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}(y-ax) = b \tag{13}$$

су неопходни за постојање косе асимптоте $y = ax + b$. Услови (13) су и довољни, јер из $\lim\limits_{x\to+\infty}(y-ax) = b$ следи (12).

7.5. Понашање функција: конструкција графика функције

Искористимо сада апарат развијен у претходним поглављима да бисмо испитали функцију и нацртали њен график. Ово последње је најбоље вршити у следећем редоследу.

1. Одредити домен функције и наћи нуле функције.

2. Уочити интервале непрекидности и тачке у којима је функција прекидна. Испитати да ли је функција парна, непарна или периодична.

3. На крајевима интервала дефинисаности испитати како се понаша функција. Наћи асимптоте.

4. Израчунати први извод функције и одредити где је он дефинисан. Наћи интервале монотоности. Наћи локалне минимуме и локалне максимуме функције.

5. Израчунати други извод функције и одредити где је он дефинисан. Наћи интервале на којима је функција конвексна на доле и на горе. Наћи превојне тачке функције.

6. Нацртати график функције.

Пример 8. Треба испитати функцију $y = \dfrac{|2-x|}{3\sqrt{x^2+4}}$ и конструисати њен график.

Уочимо да је

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{2\sqrt{x^2+9}}, & x \geq 3 \\ \dfrac{3-x}{2\sqrt{x^2+9}}, & x < 3. \end{cases}$$

Функција је дефинисана на скупу $\mathbf{R}$. Њена јединствена нула је $x = 3$. График сече Oy-осу у тачки $(0, 1/2)$. Како је

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{2},$$

то је права $y = 1/2$ хоризонтална асимптота када $x \to \pm\infty$.

Први извод функције је

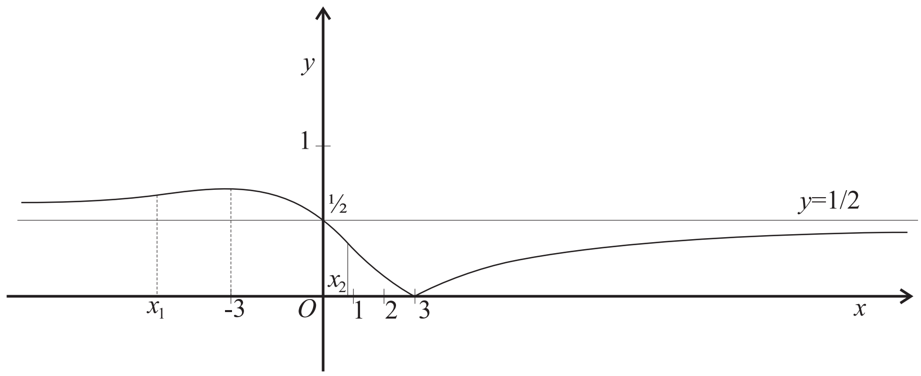
$$y'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(x^2+9)^{-3/2}(x+3), & x > 3 \\ -\dfrac{3}{2}(x^2+9)^{-3/2}(x+3), & x < 3. \end{cases}$$

Једначина $y'(x) = 0$ има решење $x = -3$. У тачки $x = 3$ први извод функције није дефинисан, али је то повратна тачка графика функције, у њој функција има леви и десни извод, и они су редом једнаки

$$y'_-(3) = -\frac{1}{6\sqrt{2}}, \qquad y'_+(3) = \frac{1}{6\sqrt{2}}.$$

Из знака првог извода следи да функција расте на интервалима $(-\infty, -3)$ и $(3, +\infty)$, а опада на интервалу $(-3, 3)$. Одатле следи да функција у тачки $x = -3$ има локални максимум, а у тачки $x = 3$ локални минимум, и при томе је

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y_{\min} = y(3) = 0.$$



Други извод функције је

$$y''(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}(x^2+9)^{-5/2}(2x^2+9x-9), & x > 3 \\ \dfrac{3}{2}(x^2+9)^{-5/2}(2x^2+9x-9), & x < 3. \end{cases}$$

Лако је видети да функција има превојне тачке за

$$x_1 = \frac{-9-3\sqrt{17}}{4} \qquad \text{и} \qquad x_2 = \frac{-9+3\sqrt{17}}{4}.$$

На интервалима $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, 3)$ функција је конвексна на доле, а на интервалима (x_1, x_2) и $(3, +\infty)$ она је конвексна на горе. □

Пример 9. Треба испитати функцију $y = \arcsin\dfrac{1-x}{1-2x}$ и конструисати њен график.

Функција је дефинисана ако је

$$-1 \leq \frac{1-x}{1-2x} \leq 1,$$

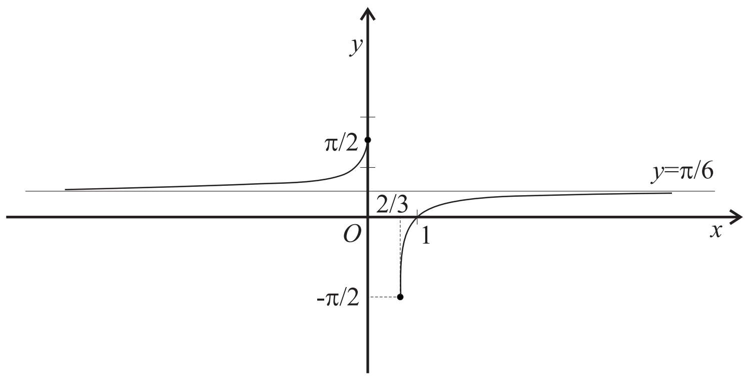
тј. $D_f = (-\infty, 0] \cup [2/3, +\infty)$. Како је

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arcsin\frac{1-x}{1-2x} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

то је права $y = \pi/6$ хоризонтална асимптота функције и када $x \to -\infty$, и када $x \to +\infty$. Приметимо такође да је

$$y(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \qquad y(2/3) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Јединствена нула функције је тачка $x = 1$.



Њен први извод је

$$y'(x) = \frac{1}{|1-2x|\sqrt{x(3x-2)}}, \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty).$$

На скупу на коме је дефинисан први извод функције је свуда позитиван, а како је функција непрекидна у тачкама $x = 0$ и $x = 2/3$, то је на интервалима $(-\infty, 0]$ и $[2/3, +\infty)$ функција строго растућа. Приметимо такође да је $y'_-(0) = y'_+(2/3) = +\infty$.

Други извод функције је

$$y''(x) = \frac{12x^2 - 9x + 1}{[x(3x-2)]^{3/2}\,(1-2x)^2}\,\mathrm{sgn}\,(1-2x), \qquad x \in (-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty).$$

Ова функција је негативна на интервалу $(2/3, +\infty)$, а на скупу $(-\infty, 0)$ је позитивна. Одавде (и из непрекидности функције коју испитујемо у тачкама $x = 0$ и $x = 2/3$) следи да је ова функција конвексна на доле на интервалу $(-\infty, 0]$, а конвексна на горе на интервалу $[2/3, +\infty)$. $\square$

Пример 10. Треба испитати функцију $y = \dfrac{x}{2} + \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$ и конструисати њен график.

Домен функције

$$f(x) = \frac{x}{2} + \arccos\frac{2x}{1+x^2}$$

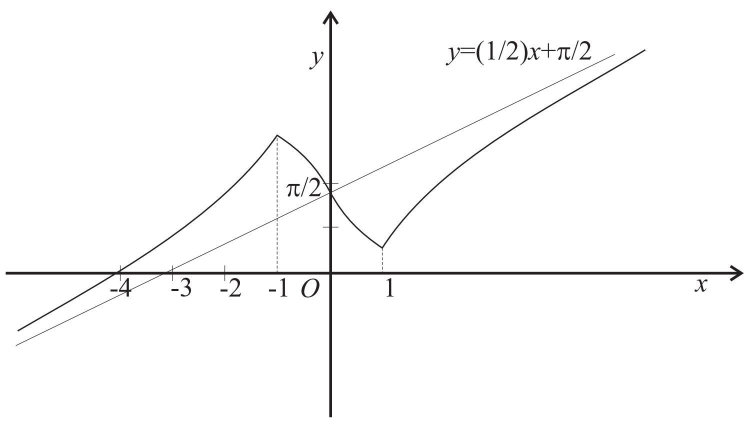
је скуп $D_f = \mathbf{R}$, јер је

$$-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1$$

испуњено за свако реално x. Како је

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\arccos\frac{2x}{1+x^2}}{x} = 1/2,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x/2) = \lim_{x\to\pm\infty}\arccos\frac{2x}{1+x^2} = \arccos 0 = \pi/2,$$

то је права $y = (1/2)x + \pi/2$ коса асимптота функције када $x \to \pm\infty$.



Први извод

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 4\mathrm{sgn}\,(1-x^2)}{2(1+x^2)}$$

је дефинисан за свако реално x такво да је $x \neq -1$ и $x \neq 1$. Једначина $f'(x) = 0$ је еквивалентна једначини

$$1 + x^2 - 4\mathrm{sgn}\,(1-x^2) = 0 \qquad (x \neq -1 \wedge x \neq 1),$$

а ова последња је еквивалентна једначини $x^2+5=0$ ако је $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, односно једначини $x^2-3=0$, ако је $x \in (-1,1)$. Ниједна од ових једначина нема решења (нуле $x_1' = -\sqrt{3}$ и $x_2' = \sqrt{3}$ квадратног тринома x^2-3 не припадају скупу $(-1,1)$), те самим тим и једначина $f'(x) = 0$ нема решења. Лако је видети да је функција $f'(x)$ на интервалима $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ позитивна, а на интервалу $(-1,1)$ негативна. Одавде следи да функција $f(x)$ расте на интервалима $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$, а на интервалу $(-1,1)$ опада, и да је самим тим у тачки $x_1 = -1$ локални максимум функције, а у тачки $x_2 = 1$ њен локални минимум. Приметимо такође да су тачке x_1 и x_2, у којима први извод функције није дефинисан, њене повратне тачке, тј. у њима график функције има "шиљак", и то

$$f'_-(-1) = f'_+(1) = 3/2, \qquad f'_+(-1) = f'_-(1) = -1/2.$$

Други извод функције је

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (-1,1), \\ -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}, & x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty), \end{cases}$$

па је лако закључити да је функција на интервалима $(-\infty,-1)$ и $(0,1)$ конвексна на доле, а на интервалима $(-1,0)$ и $(1,+\infty)$ — на горе. Одатле следи да су превојне тачке $x=-1$, $x=0$ и $x=1$. $\square$