Лекција 6

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН

- ▶ Основне теореме диференцијалног рачуна
- ▶ Лопиталово правило
- ▶ Тејлорова формула
- ▶ Примери неких основних Тејлорових формула и неке примене ових формула
- ▶ Други облици за остатак Тејлорове формуле

6.1. Основне теореме диференцијалног рачуна

Нека је функција дефинисана у некој околини тачке x_0+0 $[x_0-0]$. Тачка x_0+0 $[x_0-0]$ је тачка *рашћења* функције f, ако постоји $\delta>0$ такво да је $f(x_0)<f(x)$ $[f(x)<f(x_0)]$ за свако $x_0<x<x_0+\delta$ $[x_0-\delta<x<x_0]$. Тачка x_0+0 $[x_0-0]$ је тачка (*опадања*) функције f, ако постоји $\delta>0$ такво да је $f(x_0)>f(x)$ $[f(x)>f(x_0)]$ за свако $x_0<x<x_0+\delta$ $[x_0-\delta<x<x_0\,]$.

Тачка x_0 је тачка *рашћења* [*опадања*] функције f, ако су тачке x_0-0 и x_0+0 тачке рашћења [опадања] функције f.

Лема 1. *Нека за функцију f у тачки x_0 постоји (у ширем смислу) $f'_-(x_0)$ $[f'_+(x_0)]$. Ако је $f'_-(x_0)>0$ $[f'_+(x_0)>0]$, онда је x_0-0 $[x_0+0]$ тачка рашћења функције f. Ако је $f'_-(x_0)<0$ $[f'_+(x_0)<0]$, онда је x_0-0 $[x_0+0]$ тачка опадања функције f.*

Доказ. Рецимо претпоставимо да је $f'_+(x_0)>0$ (овај случај је испуњен и када је $f'_+(x_0)=+\infty$); остали случајеви се слично разматрају. Тада имамо да је

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0,$$

па онда постоји $\delta>0$ такво да за свако Δx, $0<\Delta x<\delta$, важи да је $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$, тј. $f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$. Дакле заиста је тачка x_0+0 тачка рашћења функције f. $\square$

Теорема 1. [Фермаова теорема] *Функција* $f(x)$ *је дефинисана у околини тачке* x_0 *и има у тој тачки локални минимум или локални максимум. Ако функција у тачки* x_0 *има извод у ширем смислу, тада је* $f'(x_0) = 0$.

Доказ. Претпоставимо да функција у тачки x_0 има локални максимум (слично се разматра случај када функција у датој тачки има локални минимум).

Ако је $f'(x_0) > 0$, онда је $f'_+(x_0) > 0$, па из леме 1 следи да је тачка $x_0 + 0$ тачка рашћења функције f. Дакле за свако $\delta > 0$ на интервалу $[x_0, x_0 + \delta)$ постоји тачка x таква да је $f(x_0) < f(x)$, па x_0 не може бити локални максимум. Из добијене контрадикције следи да није $f'(x_0) > 0$.

Ако је $f'(x_0) < 0$, онда је и $f'_-(x_0) < 0$, па из леме 1 следи да је тачка $x_0 - 0$ тачка опадања функције f. Дакле за свако $\delta > 0$ на интервалу $(x_0 - \delta, x_0]$ постоји тачка x таква да је $f(x) > f(x_0)$, па x_0, као у претходном случају, опет не може бити локални максимум. Дакле не важи да је $f'(x_0) < 0$.

Сада како није ни $f'(x_0) < 0$ ни $f'(x_0) < 0$, то имамо да је $f'(x_0) = 0$. $\square$

Теорема 2. [Дарбуова теорема] *Ако је функција* $f(x)$ *диференцијабилна на интервалу* $[a, b]$ (*у тачки* a *има извод с десна, а у тачки* b *с лева*) *тада функција* $f'(x)$ *на интервалу* (a, b) *узима и све вредности које се налазе између* $f'_+(a)$ *и* $f'_-(b)$.

Доказ. Размотримо прво случај када је $f'_+(a)f'_-(b) < 0$ и покажимо да постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f'(c) = 0$. Не губећи ништа од општости можемо претпоставити да је $f'_+(a) > 0$, а $f'_-(b) < 0$. Из леме 1 тада следи да је тачка $a + 0$ тачка рашћења, а тачка $b - 0$ тачка опадања функције f, па постоје тачке x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, такве да је $f(a) < f(x_1)$ и $f(x_2) > f(b)$. Пошто је функција f диференцијабилана на $[a, b]$, то је она и непрекидна на том интервалу, па из Вајерштрасове теореме следи да на интервалу $[a, b]$ функција достиже свој максимум, тј. постоји $c \in [a, b]$ такво да је $f(x) < f(c)$ за свако $x \in [a, b]$. Из $f(a) < f(x_1)$ и $f(x_2) > f(b)$ следи да c није једнако ни a ни b, тј. $c \in (a, b)$. Дакле функција f је дефинисана у некој околини тачке c, која је уједно и локални максимум, па из Фермаове теореме следи да је $f'(c) = 0$.

Нека је сада C нека вредност између $A = f'_+(a)$ и $B = f'_-(b)$ ($C \neq A$ и $C \neq B$). Посматрајмо помоћну функцију $g(x) = f(x) - Cx$. Тада је, очигледно,

$$g'_+(a)g'_-(b) = (f'_+(a) - C)(f'_-(b) - C) < 0,$$

па из претходног разматрања имамо да постоји $c \in (a, b)$ такво да је $g'(c) = f'(c) - C = 0$, тј. такво да је $f'(c) = C$. $\square$

Из претходне теореме следи закључак да мада изводна функција $f'(x)$ не мора бити непрекидна она се понаша веома слично непрекидним функцијама (упореди са Болцано-Кошијевом теоремом за непрекидне функције).

Теорема 3. [Ролова теорема] *Нека је функција* f

1) *непрекидна на интервалу* $[a, b]$;

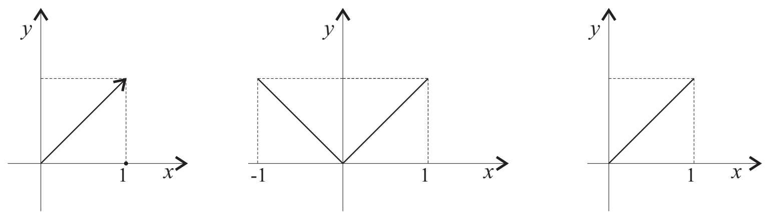
2) *има у ширем смислу извод на отвореном интервалу* (a, b);

3) $f(a) = f(b)$.

Тада постоји $c \in (a, b)$ *за које важи* $f'(c) = 0$.

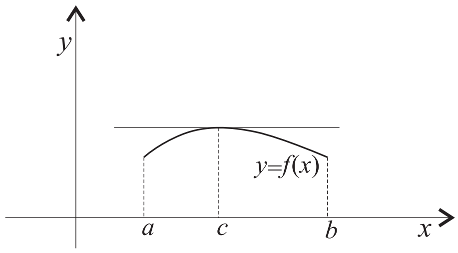
Доказ. Како је функција непрекидна на $[a, b]$, то по Вајерштрасовој теореми достиже свој максимум у тачки $c_1 \in [a, b]$ и минимум у тачки $c_2 \in [a, b]$. Ако је $f(c_1) = f(c_2)$, онда је функција константна и произвољна тачка $c \in (a, b)$ задовољава услов теореме. Ако је $f(c_1) \neq f(c_2)$, онда из 3) следи да је или c_1 или c_2 са (a, b), па из Фермаове теореме следи да је $f'(c_1) = 0$ или $f'(c_2) = 0$. $\square$

Покажимо да ако било који од услова у горњој теореми није задовољен, онда тврђење не мора да важи.



$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$ $y=f_3(x)$

Уочимо функције (види слику): $f_1 : [0, 1] \to \mathbf{R}$, где је $f_1(x) = x$, ако је $0 \leq x < 1$, и $f(1) = 0$; $f_2 : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, где је $f_2(x) = |x|$, и $f_3 : [0, 1] \to \mathbf{R}$, где је $f_3(x) = x$. Ни за једну од ових функција не важи тврђење теореме, али свака од њих задовољава тачно два од три услова претходне теореме. Функција f_1 не задовољава први, f_2 други, а f_3 трећи услов.



Геометријски смисао Роловe теореме се састоји у следећем. Ако су задовољени услови последње теореме, онда постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је тангента на график функције $y = f(x)$ у тачки $(c, f(c))$ паралелна x-оси.

Пример 1. Нека су све нуле полинома са реалним коефицијентима

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

реалне. Покажимо да тада и полиноми $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ имају само реалне корене.

Очигледно, довољно је само показати да је такав полином $f'(x)$. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \leq n)$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, све различите међу собом нуле датог полинома, и нека је k_i, $1 \leq i \leq m$, ред нуле x_i. Тада је $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$. Као што знамо, ако је $k_i > 1$, онда је x_i нула полинома $f'(x)$ реда $k_i - 1$. Ако је $k_i = 1$, онда x_i није више нула полинома $f'(x)$ и $k_i - 1 = 0$. Дакле "укупан удео" бројева $x_1, x_2, \ldots, x_m$ у броју нула, узетих са понављањем, полинома $f'(x)$ је

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \cdots + (k_m - 1) = n - m.$$

Полиноми су непрекидни и диференцијабилни на читавом скупу $\mathbf{R}$, па на сваком од интервала $[x_i, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq m-1$, можемо применити Ролову теорему. Значи постоје тачке $y_i \in (x_i, x_{i+1})$, $1 \leq i \leq m-1$, такве да је $f'(y_i) = 0$. Дакле, укупан број нула, узетих са понављањем, полинома $f'(x)$ је

$$(n - m) + (m - 1) = n - 1.$$

Како полином $f'(x)$ има, узетих са понављањем, тачно $n-1$ нула, то су све нуле полинома $f'(x)$, заиста, реалне. $\square$

Теорема 4. [Лагранжова теорема] *Нека је функција f*

1) *непрекидна на интервалу $[a, b]$;*

2) *има у ширем смислу извод на отвореном интервалу (a, b).*

Тада постоји $c \in (a, b)$ за које важи

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доказ. Ово тврђење следи из Ролове теореме. Наиме уведимо помоћну функцију
$$F(x) = f(x) - \lambda x,$$
где реалан број λ бирамо тако да је $F(a) = F(b)$, т.ј.
$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b, \quad \text{па је} \quad \lambda = \frac{f(a) - f(b)}{b - a}.$$
Значи
$$F(x) = f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{b - a}\, x.$$
Ова функција је непрекидна на $[a, b]$, као разлика две непрекидне функције на том интервалу, има извод у ширем смислу на (a, b), јер је таква функција $f(x)$, а линеарна функција $\frac{f(a) - f(b)}{b - a}\, x$ има свуда извод. Услов $F(a) = F(b)$ је задовољен, јер смо тако и бирали константу λ. Значи сви услови за примену Ролове теореме су испуњени, па постоји $c \in (a, b)$ такво да је
$$F'(c) = 0, \quad \text{тј.} \quad f'(c) - \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = 0.$$
Одавде добијамо, напокон, да је
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \,\square$$

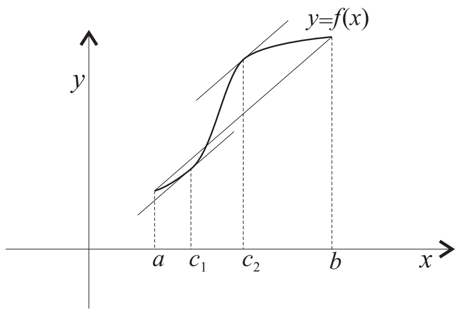
Дајмо још неколико облика за формулу из претходне теореме. Приметимо да ако је $a < \xi < b$, онда за $\theta = \frac{\xi - a}{b - a}$ важи $\xi = a + \theta(b - a)$ и $0 < \theta < 1$. Сада формулу из претходне теореме можемо дати и у облику
$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad \text{где је} \quad 0 < \theta < 1.$$
Ако још узмемо да је $a = x$, $b = x + \Delta x$ и $b - a = \Delta x$, добијамо, напокон, да је
$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x)\Delta x \tag{1}$$

за неко $0 < \theta < 1$. Приметимо да ова формула важи како за $\Delta x > 0$, тако и за $\Delta x < 0$. Формула (1) се зове *формула коначних прираштаја*. Упоредимо је са приближном формулом

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Формула (1) има у односу на последњу формулу извесну предност, особито када су у питању теоријска разматрања, јер је тачна. Мада вредност извода се рачуна у тачки која нам није позната, информација да је она са одређеног интервала је понекад довољна.

Геометријски смисао Лагранжове теореме се састоји у следећем (види слику). Приметимо да је број



$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

коефицијенат правца сечице l која пролази кроз тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Сада, ако су задовољени услови последње теореме, онда постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је тангента на график функције $y = f(x)$ у тачки $(c, f(c))$ паралелна правој l (на слици постоје две такве тачке).

Пример 2. Покажимо да ако је диференцијабилна на интервалу (a, b) функција $f(x)$ неограничена, тада је и функција $f'(x)$ неограничена.

Претпоставимо да ово тврђење није тачно, и нека постоји $C \in \mathbf{R}$ такво да је $|f'(x)| < C$ за свако $x \in (a, b)$. Узмимо неко $c \in (a, b)$ и реално Δx такво да је $c + \Delta x \in (a, b)$. Тада из Лагранжове теореме имамо да је

$$|f(c + \Delta x) - f(c)| = |f(\xi)|\,|\Delta x| < C(b - a),$$

односно,

$$|f(c + \Delta x)| < |f(c)| + C(b - a).$$

Како вредност $c + \Delta x$ може бити произвољна са интервала (a, b), то је $|f(x)| < |f(c)| + C(b - a)$ за свако $x \in (a, b)$, па је функција $f(x)$ ограничена. Из добијене контрадикције следи да је $f'(x)$ такође неограничена функција. $\square$

Пример 3. Покажимо да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Приметимо да важи

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1+n) - \ln n.$$

Посматрајмо функцију $y = \ln x$ на интервалу $[n, n+1]$. Она је непрекидна на том интервалу и диференцијабилна на $(n, n+1)$. Дакле из Лагранжове теореме имамо

$$\ln(1+n) - \ln n = \frac{1}{c}(n+1-n) = \frac{1}{c} \tag{2}$$

за неко $c \in (n, n+1)$. А како је $c < n+1$, то је $1/c > 1/(n+1)$, па из (2) добијамо тражено тврђење. $\square$

Последица 1. *Нека је функција* f

1) *дефинисана на неком коначном или бесконачном интервалу* Δ;
2) *има извод једнак* 0 *у свим унутрашњим тачкама тог интервала*;
3) *непрекидна на крајевима интервала* Δ, *ако такве тачке за* Δ *постоје*.

Тада је функција f *константна на посматраном интервалу.*

Доказ. За произвољно $x_1, x_2 \in \Delta$ на функцију f на интервалу $[x_1, x_2]$ се може применити теорема Лагранжа, па је

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \tag{3}$$

за неко $\xi \in (x_1, x_2)$. Како је вредност извода дате функције у свим унутрашњим тачкама интервала Δ једнака 0, то је $f'(\xi) = 0$, па из (3) следи да је $f(x_1) = f(x_2)$. $\square$

Пример 4. Покажимо да ако је функција $f(x)$ таква да је $f^{(n)}(x) = 0$ за свако $x \in \mathbf{R}$, онда је $f(x)$ полином $n-1$-вог степена. Покажимо ово тврђење индукцијом. За $n = 1$ ово тврђење важи, јер функција тада задовољава услове претходног тврђења, па је функција константна на скупу $\mathbf{R}$.

Претпоставимо да ово тврђење важи за $n-1$ и покажимо да важи за n. Како је $f^{(n)}(x) = 0$, онда из последице 1 следи да је $f^{(n-1)}(x) = b_{n-1}$

за неко $b_{n-1} \in \mathbf{R}$. Уочимо тада функцију $g(x) = f(x) - \dfrac{b_{n-1}}{(n-1)!}\, x^{n-1}$. Али како је $g^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - b_{n-1} = 0$, то из индуктивне претпоставке следи да је

$$f(x) - \frac{b_{n-1}}{(n-1)!}\, x^{n-1} = a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

т.ј.

$$f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

где је $a_{n-1} = b_{n-1}/(n-1)!$, што је и требало да се покаже. □

Последица 2. *Ако су функције f и g у свакој унутрашњој тачки x неког коначног или бесконачног интервала Δ диференцијабилне и важи $f'(x) = g'(x)$, а на крајевима (ако постоје) интервала Δ су непрекидне, онда постоји $C \in \mathbf{R}$ такво да је $f(x) - g(x) = C$ за свако $x \in \Delta$.*

Доказ. Уочимо функцију $h(x) = f(x) - g(x)$. Приметимо да су сви услови претходне теореме задовољени за функцију $h(x)$. Рецимо, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ за сваку унутрашњу тачку x интервала Δ. Дакле постоји $C \in \mathbf{R}$ такво да је $h(x) = C$ за свако $x \in \Delta$, што је и требало да се покаже. □

Последица 3. *Нека је функција $f(x)$ диференцијабилна на интервалу (a, b) и нека је $f'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$. Тада је функција f строго монотона на (a, b).*

Доказ. Претпоставимо да постоје тачке x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, такве да је $f'(x_1)f'(x_2) < 0$. Али тада из Дарбуове теореме следи да постоји $c \in (x_1, x_2)$, а дакле и $c \in (a, b)$, такво да је $f'(c) = 0$. Из добијене контрадикције следи да је или $f'(x) > 0$ за свако $x \in (a, b)$, или $f'(x) < 0$ за свако $x \in (a, b)$. Узмимо сада произвољне тачке x_1 и x_2, $x_1 < x_2$, са интервала (a, b), и нека је $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ за свако $x \in (a, b)$. Примењујући Лагранжову теорему на интервал $[x_1, x_2]$ добијамо да за неко $\xi \in (x_1, x_2)$ важи релација (3). Како је тада $f(\xi)(x_2 - x_1) > 0$ $[f(\xi)(x_2 - x_1) < 0]$, имамо да је $f(x_2) - f(x_1) > 0$ $[f(x_2) - f(x_1) < 0]$, односно, $f(x_2) > f(x_1)$ $[f(x_2) < f(x_1)]$, па је функција f строго растућа или строго опадајућа на интервалу (a, b). □

Последица 4. *Ако је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $[a, b]$, диференцијабилна на отвореном интервалу (a, b) и $f'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$, тада је функција f строго монотона на $[a, b]$.*

Доказ. Из претходног тврђења следи да је функција f строго монотона на (a, b). Претпоставимо, рецимо, да је дата функција строго растућа на (a, b), т.ј. $f'(x) > 0$ за свако $x \in (a, b)$. Тада на интервал $[a, x]$, где је x произвољна тачка са интервала $(a, b]$, можемо применити Лагранжеву теорему и добијамо да за неко $\xi \in (a, x)$ је

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) > 0.$$

Дакле $f(a) < f(x)$. Слично се показује да је $f(x) < f(b)$ за свако $x \in [a, b)$. Следи функција је строго растућа на читавом интервалу $[a, b]$. $\square$

Последица 5. *Дате су тачка x_0 и функција φ. Ако постоји $\varepsilon > 0$ такво да је функција φ непрекидно на $U(x_0 - 0, \varepsilon)$ $[U(x_0 + 0, \varepsilon)]$, диференцијабилна на $\dot{U}(x_0 - 0, \varepsilon)$ $[\dot{U}(x_0 + 0, \varepsilon)]$ и постоји*

$$\varphi'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \varphi'(x) \quad [\varphi'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \varphi'(x)],$$

онда је

$$\varphi'_-(x_0) = \varphi'(x_0 - 0) \quad [\varphi'_+(x_0) = \varphi'(x_0 + 0)].$$

Доказ. Покажимо тврђење за тачку $x_0 + 0$ (аналогно се оно показује за тачку $x_0 - 0$) Узмимо неко $x \in \dot{U}(x_0 + 0, \varepsilon)$. Тада је

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0), \quad \text{тј.} \quad \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0},$$

за неко $\xi \in (x_0, x)$. Вредност ξ зависи од x и таквих вредности, које задовољавају горе дату релацију, може бити више, али ми за свако x изаберимо само једну такву вредност $\xi = \xi(x)$. Како је $x_0 < \xi(x) < x$, то је $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \xi(x) = x_0 + 0$. Како је $\xi(x) \neq x_0$ за свако $x \in \dot{U}(x_0 + 0, \varepsilon)$, то из последице 8.9 следи

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \varphi'[\xi(x)] = \lim_{y \to x_0 + 0} \varphi'(y) = \varphi'(x_0 + 0),$$

а одавде следи

$$\varphi'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \varphi'(x_0+0). \ \Box$$

Из претходног тврђења и теореме 4.1 сада имамо и следећу последицу.

Последица 6. *Дате су тачка x_0 и функција φ. Ако постоји $\varepsilon > 0$ такво да је функција φ непрекидно на $U(x_0, \varepsilon)$, диференцијабилна на $\dot{U}(x_0, \varepsilon)$ и постоји $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi'(x)$, онда је $\varphi'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi'(x)$.*

Теорема 5. [Кошијева теорема] *Нека су функције f и g*
1) *непрекидне на интервалу $[a, b]$;*
2) *имају у ширем смислу изводе на отвореном интервалу (a, b);*
3) *$g'(x) \neq 0$ за свако $x \in (a, b)$.*
Тада постоји $c \in (a, b)$ за које важи

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Доказ. Када би било $g(b) - g(a) = 0$, тј. $g(b) = g(a)$, онда би сви услови за примену Ролове теореме били испуњени, па би за неко $c \in (a, b)$ важило $g'(c) = 0$, а то је у противуречности са 3). Значи, $g(b) - g(a) \neq 0$, па и лева и десна страна формуле из ове теореме има смисла.

Као и у теореми Лагранжа формирајмо помоћну функцију

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$$

такву да је $F(a) = F(b)$. Из овог услова следи да је

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Сада применом Ролове теореме на функцију $F(x)$ добијамо формулу из теореме. $\Box$

Лопиталово правило уствари чини група од четири теореме. Оне служе да се разреше неки сумњиви случајеви граничних вредности, када проста примена основих теорема доводи до израза који немају смисла и које ми обично зовемо неодређеностима. Неодређености могу бити типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 и 1^∞.

Теорема 6. *У некој околини тачке* $x_0 - 0$ $[x_0 + 0]$ *функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *су дефинисане и* $f(x_0) = g(x_0) = 0$. *Ако постоје* $f'_-(x_0)$ $[f'_+(x_0)]$ *и* $g'_-(x_0)$ $[g'_+(x_0)]$, *где је* $g'_-(x_0) \neq 0$ $[g'_+(x_0) \neq 0]$, *онда је*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'_-(x_0)}{g'_-(x_0)} \quad \left[\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'_+(x_0)}{g'_+(x_0)}\right].$$

Доказ. Покажимо тврђење за тачку $x_0 + 0$ (аналогно се оно показује и за тачку $x_0 - 0$). Како је $g'_+(x_0) \neq 0$, то је $g(x) \neq 0$ у некој шупљој околини тачке $x_0 + 0$ (следи из леме 1 и чињенице да је $g(x_0) = 0$). Из диференцијабилности функција $f(x)$ и $g(x)$ с десна у тачки x_0 следи да је

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \\ g(x) &= g(x_0) + g'_+(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

Сада, из $f(x_0) = g(x_0) = 0$ имамо да је

$$f(x) = f'_+(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{и} \quad g(x) = g'_+(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Одавде добијамо

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f'_+(x_0) + \dfrac{o(x - x_0)}{x - x_0}}{g'_+(x_0) + \dfrac{o(x - x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'_+(x_0)}{g'_+(x_0)}. \square$$

Претходна теорема и теорема 4.1 повлаче следеће тврђење.

Последица 7. *У некој околини* $U(x_0)$ *тачке* $x_0 \in \mathbf{R}$ *функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *су дефинисане,* $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *и постоје* $f'(x_0)$ *и* $g'(x_0)$, $g'(x_0) \neq 0$. *Тада је*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Теорема 7. *Нека је* a *или* $x_0 - 0$ $[x_0 + 0]$ *за неки реалан број* x_0, *или* $+\infty$ $[-\infty]$, *и нека су функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *диференцијабилне у некој шупљој околини* $\dot{U}(a)$ *елемента* a *и* $g'(x) \neq 0$ *за свако* $x \in \dot{U}(a)$. *Ако је или* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, *или* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, *и* $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A$, *где је* $-\infty \le A \le +\infty$, *онда је* $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = A$, *т.ј.*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Доказ. Размотримо случај када је или $a = x_0 - 0$, или $a = +\infty$ (аналогно се разматра и случај када је или $a = x_0 + 0$, или $a = -\infty$). Пошто је $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in \dot{U}(a)$, то из Дарбуове теореме следи да је или $g'(x) > 0$, или $g'(x) < 0$ за свако $x \in \dot{U}(a)$, односно функција $g(x)$ је строго монотона на $\dot{U}(a)$.

Да би смо показали тврђење теореме довољно је за сваки строго монотони низ (x_n) из $\dot{U}(a)$, такав да $(x_n) \to x_0$, показати да је $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)/g(x_n) = A$. Дакле, нека је (x_n) један такав низ.

Приметимо да заменом у теореми функција $f(x)$ и $g(x)$ редом са $-f(x)$ и $-g(x)$ сви услови теореме остају да важе. Одавде следи да у случају, када је лимес $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ бесконачан, можемо претпоставити да је он једнак $+\infty$ (у противном извршимо горе наведену замену), тј. можемо претпоставити да је низ $g(x_n)$ строго растући и да $(g(x_n)) \to +\infty$. Ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, онда можемо претпоставити да функција $g(x)$ строго опада (иначе опет можемо извршити горе наведену замену), тј. можемо претпоставити да су низови $(f(x_n))$ и $(g(x_n))$ нула низови, а да низ $(g(x_n))$ строго опада. Сада, у оба случаја, из Штолцове теореме (теорема 6.24) и теореме 6.25 следи да је довољно показати да је

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})} = A. \tag{4}$$

На затворени интервал одређен тачкама x_{n-1} и x_n могуће је применити Кошијеву теорему, па је

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \tag{5}$$

за неко c_n са одговарајућег отвореног интервала одређеног овим тачкама. Како $(x_{n-1}) \to a$ и $(x_n) \to a$, то и $(c_n) \to a$, па из $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A$ следи да је $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(c_n)/g'(c_n) = A$. Одавде ако на леву и десну страну једнакости (5) применимо лимес добијамо (4). $\square$

Напомена. Ако функција $f'(x)$ за произвољно $\varepsilon > 0$ на скупу $\dot{U}(a) \cap \dot{U}(a,\varepsilon)$ мења знак, онда у произвољној околини тачке a постоји тачка x_ε таква да је $f'(x_\varepsilon) = 0$, па је $A = 0$. Ако $f'(x)$ не мења знак у некој околини тачке a, онда количник $f'(x)/g'(x)$ не мења знак у тој околини, и ако је A бесконачно, ми можемо да узмемо да је или $A = -\infty$, или $A = +\infty$. Такође, видели смо да је функција $g(x)$ је строго монотона на $\dot{U}(a)$, па ако је лимес $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ бесконачан, онда је овај лимес једнак или $-\infty$, или $+\infty$. Дакле, заиста смо у горњој теореми могли да претпоставимо да су бројеви A и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ако су бесконачни, бесконачности одређеног знака.

Претходна теорема и теорема 4.1 повлаче следеће тврђење.

Последица 8. *Нека је a или x_0, $x_0 \in \mathbf{R}$, или ∞, и нека су функције $f(x)$ и $g(x)$ диференцијабилне у некој шупљој околини $\dot{U}(a)$ тачке a и $g'(x) \neq 0$ за свако $x \in \dot{U}(a)$. Ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, и $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A$, где је $-\infty \leq A \leq +\infty$, онда је $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = A$, т.ј.*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

6.3. Тејлорова формула

Претпоставимо да је функција $y = f(x)$ диференцијабилна у тачки $x = x_0$, тј. важи

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

где је $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - y_0$, $y_0 = f(x_0)$ и $A = f'(x_0)$. Другим речима имамо да је

$$f(x) = y_0 + A(x - x_0) + o(x - x_0),$$

тј. ако означимо са

$$P_1(x) = y_0 + A(x - x_0),$$

онда је

$$f(x) = P_1(x) + o(x - x_0), \tag{6}$$

када $x \to x_0$, и важи

$$P_1(x_0) = y_0 = f(x_0), \quad P_1'(x_0) = A = f'(x_0).$$

Претпоставимо сада да у тачки x_0 функција $f(x)$ има све изводе до n-тог закључно. Тада по аналогији са (6) потражимо полином

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n, \tag{7}$$

такав да је

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

и при томе важи

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P_n'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0). \tag{8}$$

Из (7) и (8) имамо

$$A_0 = P_n(x_0) = f(x_0) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}.$$

Како је

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \cdots + nA_n(x - x_0)^{n-1}$$

то је

$$A_1 = P_n'(x_0) = f'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}.$$

Даље како је

$$P_n''(x) = 2A_2 + \cdots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2},$$

то је

$$A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2} = \frac{f''(x_0)}{2!}.$$

Настављајући тако добијамо да је

$$P_n^{(k)}(x) = k!A_k + \cdots + n(n-1)(n-k+1)A_n(x-x_0)^{n-k},$$

а одавде је

$$A_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Дакле добијамо да је

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ \dots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

Означимо са

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Приметимо да је

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Важи следећа теорема.

Теорема 8. *Нека у тачки x_0 функција $f(x)$ има све изводе до n-тог закључно. Тада када $x \to x_0$ важи формула*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + o((x-x_0)^n). \tag{9}$$

Доказ. Применом Лопиталовог правила n пута, добијамо да је

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0. \square$$

Формула, коју смо управо доказали, зове се *Тејлорова формула са остатком у Пеановом облику*, а полином

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

зове се *Тејлоров полином* (n*-тог степена*). За $x_0 = 0$ формула (9) се може написати у облику

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + o(x^n)$$

и обично се зове *Маклоренова формула*. Ако означимо $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, онда се Тејлорова формула може написати у облику

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \Delta x^i + o(\Delta x^n).$$

Последица 9. *Функција $f(x)$ је дефинисана на (a, b) и у тачки $x_0 \in (a, b)$ има изводе до $n+1$-ог реда закључно. Тада за $x \to x_0$ важи*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + O((x - x_0)^{n+1}).$$

Доказ. Из претходне теореме следи да важи формула

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + r_{n+1}(x), \tag{10}$$

где је $r_{n+1}(x) = o((x - x_0)^{n+1})$, када $x \to x_0$. Дакле, у некој шупљој околини тачке x_0 важи $r_{n+1}(x) = \varepsilon(x)(x - x_0)^{n+1}$, где је $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Тада је

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + \varepsilon(x) \right] = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!},$$

па из теореме 8.22 имамо да је функција

$$\beta(x) = f^{(n+1)}(x_0)/(n+1)! + \varepsilon(x)$$

у некој шупљој околини тачке x_0 ограничена. Како је

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} + r_{n+1}(x) = \beta(x)(x - x_0)^{n+1},$$

то је
$$\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+r_{n+1}(x)=O((x-x_0)^{n+1}),$$
и формула из теореме важи. $\square$

6.4. Примери неких основних Тејлорових формула и неке примене ових формула

За почетак размотримо Тејлорове формуле неких елементарних функција.

1) Посматрајмо функцију $f(x)=e^x$. Тада је $f^{(k)}(x)=e^x$ за свако природно k, па је $f^{(k)}(0)=1$ за свако $k\geq 0$. Дакле добијамо да је
$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

2) Посматрајмо сада функцију $f(x)=\sin x$. Видели смо раније да је тада $f^{(k)}(x)=\sin\Big(x+k\frac{\pi}{2}\Big)$. Дакле имамо да је $f(0)=0$, $f^{(2m)}(0)=\sin m\pi=0$ и $f^{(2m-1)}(0)=\sin\Big(m\pi-\frac{\pi}{2}\Big)=(-1)^{m-1}$. за свако природно m. Дакле добијамо да за $n=2m$ важи
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m}).$$

3) Слично за функцију $f(x)=\cos x$, када је $n=2m+1$ имамо
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1}).$$

4) Нађимо Тејлорову формулу за функцију $y=x^m$, где је m реалан број различит од ненегативног целог броја. У овом случају или сама функција или изводи почев од неког реда нису дефинисани у 0. Стога, у суштини, развијамо ову функцију у околини тачке $x_0=1$, али да би смо избегли развијање функције по степенима од $x-1$, сменом променљиве овај случај сводимо на разлагање функције $(1+x)^m$ по степенима од x. Како је сада

$f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k}$, то је $f(0) = 1$ и $f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-k+1)$, па је

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

5) Посматрајмо функцију $y = \ln(1+x)$. Није тешко видети да је

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

6) Из примера 5.13 следи да је за функцију $y = \operatorname{arctg} x$ Маклоренова формула

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + o(x^{2m})$$

(овде смо узели да је $n = 2m$).

Користећи дате формуле можемо наћи Тејлорову формулу са остатком у Пеановом облику и сложенијих функција, а да при томе не израчунавамо директно изводе тих функција. Пре него дамо неколико примера приметимо да је представљање функције Тејлоровом формулом јединствено. Наиме, покажимо да из

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

и

$$f(x) = a_0' + a_1'(x-x_0) + a_2'(x-x_0)^2 + \dots + a_n'(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

следи да је

$$a_0 = a_0', \quad a_1 = a_1', \quad \dots, \quad a_n = a_n'.$$

Како важи $o\left((x-x_0)^n\right) = o\left((x-x_0)^n\right) - o\left((x-x_0)^n\right)$, то је

$$\begin{aligned}&a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n = \\ &\quad = a_0' + a_1'(x-x_0) + a_2'(x-x_0)^2 + \dots + a_n'(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right).\end{aligned}$$

Ако сада применимо лимес на леву и десну страну ове једнакости када $x \to x_0$, одмах добијамо да је $a_0 = a_0'$. Одбацујући чланове a_0 и a_0' с леве и десне стране и делећи са $x - x_0$ добијамо да је

$$\begin{aligned}&a_1 + a_2(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^{n-1} = \\ &\qquad = a_1' + a_2'(x-x_0) + \dots + a_n'(x-x_0)^{n-1} + o\left((x-x_0)^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Поступајући аналогно као у претходном случају добијамо да је $a_1 = a_1'$ итд.

Пример 5. Представимо Тејлоровом формулом трећег реда са остатком у Пеановом облику функцију $y = e^{\operatorname{arctg} x}$. Из Маклоренове формуле за функцију $y = e^x$ следи да је

$$e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{1!} + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2!} + \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3!} + o(x^3)$$

(уместо $o(\operatorname{arctg}^3 x)$ пишемо $o(x^3)$, јер из $\operatorname{arctg} x \sim x$ следи да је $o(\operatorname{arctg}^3 x) = o(x^3)$). Али сада из 6) следи да је

$$e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 + \\ + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^3 + o(x^3).$$

Дакле, добијамо

$$e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3). \square$$

Користећи Тејлорову формулу са остатком у Пеановом облику можемо веома лако израчунати неке лимесе.

Пример 6. Рецимо, користећи 3) имамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + x^2/2! + o(x^3)}{x^2} = \frac{1}{2}. \square$$

Пример 7. Користећи 5) и пример 5 имамо да је

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - x - 1}{\ln(1+x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)} = -1. \square$$

6.5. Други облици за остатак Тејлорове формуле

Нека је $f(x)$ n пута диференцијабилна функција у некој околини $U(x_0)$ тачке x_0 и нека је за неко $x \in U(x_0)$ функција $\psi(t)$ непрекидна на затвореном интервалу одређеном тачкама x и x_0, диференцијабилна на одговарајућем отвореном интервалу и нека је $\psi'(t) \neq 0$ за свако t са тог интервала. Претпоставимо ради одређености да је $x > x_0$. Тада постоји $\xi \in (x_0, x)$ за које важи формула

$$r_{n-1}(x) = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Да бисмо то доказали уведимо помоћну функцију

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Није тешко видети да је

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{f^{(k+1)(t)}}{k!}(x-t)^k - \right.$$
$$\left. - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} \right] = -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

и

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = -f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Сада из Кошијеве теореме имамо

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = [\psi(x) - \psi(x_0)] \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \varphi'(\xi),$$

тј.

$$-f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = -\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}.$$

Одавде напокон добијамо

$$r_{n-1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}.$$

Ова формула се зове *формула Шлемилха-Роша за остатак Тејлорове формуле* и из ње се могу добити и друге важне формуле.

Тако, на пример, за $\psi(t) = (x-t)^p$, $p > 0$, добијамо формулу

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!\,p}\,(x-x_0)^p(x-\xi)^{n-p}.$$

Из ове формуле за $p = n$ добијамо остатак у Лагранжовом облику

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-x_0)^n,$$

а за $p = 1$ и $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$, добијамо остатак у Кошијевом облику

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n-1)!}\,(1-\theta)^{n-1}(x-x_0)^n.$$

Дакле, ако функција $f(x)$ има n-ти извод у тачки x_0, онда можемо у околини ове тачке дату функцију апроксимирати Тејлоровим полиномом те функције, тј.

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Добијена формула има барем два добра својства: функција је апроксимирана полиномом, а полиноми су најбоље изучене функције, и, друго, грешку коју при таквој апроксимацији чинимо можемо проценити — она је једнака $|r_{n-1}(x)|$ (она је, у принципу, мања што је степен Тејлоровог полинома већи, т.ј. што више извода има дата функција, и што је тачка x ближа тачки x_0).

Пример 8. Треба апроксимирати функцију $y = 1/\sqrt{8-x}$ Тејлоровим полиномом трећег степена у околини тачке $x = -1$ и одредити остатак у Лагранжовом облику.

Имамо да је

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{8-x}}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(8-x)^{-3/2}, \quad f''(x) = \frac{3}{4}(8-x)^{-5/2},$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{15}{8}(8-x)^{-7/2}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{105}{16}(8-x)^{-9/2},$$

па је

$$f(-1) = \frac{1}{3}, \quad f'(-1) = \frac{1}{2\cdot 3^3}, \quad f''(-1) = \frac{1}{4\cdot 3^4} \quad f^{(3)}(-1) = \frac{5}{8\cdot 3^6}\,.$$

Одавде је

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3^3}(x+1) + \frac{1}{8\cdot 3^4}(x+1)^2 + \frac{5}{16\cdot 3^7}(x+1)^3 + r_3(x),$$

где је

$$r_3(x) = \frac{35}{128}[8-(-1+\theta(x+1))]^{-9/2}(x+1)^4 \quad \text{и} \quad 0<\theta<1. \square$$