Лекција 4

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН

- ▶ Извод инверзне и сложене функције
- ▶ Изводи вишег реда
- ▶ Диференцијал вишег реда

5.1. Извод инверзне и сложене функције

Теорема 1. *Нека је функција $y = f(x)$ непрекидна и строго монотона у некој околини тачке x_0 и нека постоји $\dfrac{df(x_0)}{dx} \neq 0$. Тада постоји инверзна функција $x = f^{-1}(y)$ у некој околини тачке $y_0 = f(x_0)$, она има извод у тој тачки и важи релација*

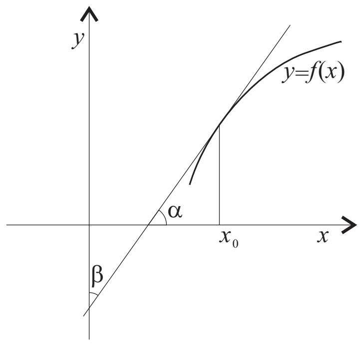
$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}. \tag{1}$$

Доказ. Нека је $(x_0 - \varepsilon, x + \varepsilon)$ околина у којој је функција $f(x)$ дефинисана, непрекидна и строго монотона, и посматрајмо функцију f само на њој. Тада из теореме 8.28 следи да постоји инверзна функција $f^{-1}(y)$ на неком отвореном интервалу који садржи тачку $y_0 = f(x_0)$, на којем је непрекидна и строго монотона (из дефиниције извода следи да је пре свега неопходно да функција од које тражимо извод у некој тачки дефинисана у некој околини те тачке). Из непрекидности у тачки x_0 следи да је $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$, а такође из услова строге монотоности следи да је $f(x) \neq y_0$ за свако x из неке шупље околине тачке x_0. Такође из непрекидности функције $f^{-1}(y)$ следи да је $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$, а из њене строге монотоности да је $f^{-1}(y) \neq x_0$ за свако y из неке шупље околине тачке y_0. Ако у последици 8.10 узмемо да је

$g(y) = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$, $\hat{f}(y) = f^{-1}(y)$, $a = x_0$ и $b = y_0$ онда добијамо

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \square$$

Резултат ове теореме има веома добру геометријску интерпретацију. Видели смо да је геометријски смисао извода функције у тачки x_0 — коефицијент правца тангенте на криву $y = f(x)$ у тачки (x_0, y_0), где је $y_0 = f(x_0)$, тј. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Тада је, такође, и $(f^{-1})'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$. Како је $\beta = \pi/2 - \alpha$, то је заиста



$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}.$$

Пример 1. Нађимо извод функције $x = \arcsin y$ (извршили смо преозначавање променљивих ради згодније примене формуле из теореме 1), која је инверзна функција од функције $y = \sin x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, у тачки $y = y_0$, $-1 \le y_0 \le 1$. Нека је $y_0 = \sin x_0$. По формули (1) добијамо

$$[\arcsin y]'\big|_{y=y_0} = \frac{1}{[\sin x]'\big|_{x=x_0}} = \frac{1}{\cos x_0} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y_0)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Дакле, добијамо да је

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогно се добија да је

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \square$$

Пример 2. Нађимо извод функције $x = \operatorname{arctg} y$, која је инверзна функција од функције $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, у тачки $y = y_0$. Нека је $y_0 = \operatorname{tg} x_0$. По формули (1) добијамо

$$[\operatorname{arctg} y]'\big|_{y=y_0} = \frac{1}{[\operatorname{tg} x]'\big|_{x=x_0}} = \frac{1}{1/\cos^2 x_0} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2}.$$

Дакле, добијамо да је

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогно се добија да је

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \square$$

Пример 3. Нађимо извод функције $x = \log_a y$, која је инверзна функција од функције $y = a^x$ $(a > 0, a \ne 1)$, у тачки $y = y_0$, $y_0 > 0$. Нека је $y_0 = a^{x_0}$. По формули (1) добијамо

$$[\log_a y]'\big|_{y=y_0} = \frac{1}{[a^x]'\big|_{x=x_0}} = \frac{1}{a^{x_0}\ln a} = \frac{1}{y_0 \ln a} = \frac{\log_a e}{y_0}.$$

Дакле, добијамо да је

$$[\log_a x]' = \frac{\log_a e}{x}. \square$$

Теорема 2. *Нека функција $y = f(x)$ има извод у тачки x_0, а функција $z = g(y)$ нека има извод у тачки $y_0 = f(x_0)$. Тада сложена функција $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ има извод у тачки x_0 и важи формула*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Доказ. Пре свега треба показати да сложена функција $g(f(x))$ постоји у некој околини тачке x_0. Из постојања извода $f'(x_0)$ и $g'(y_0)$ следи непрекидност функција f и g редом у тачкама x_0 и y_0. Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Из непрекидности функције g у тачки y_0, следи да постоји ε'-околина $U(y_0, \varepsilon')$ тачке y_0 таква да је $g[U(y_0, \varepsilon')] \subseteq U(g(y_0), \varepsilon)$. Из непрекидности функције f у тачки x_0, следи да постоји δ-околина $U(x_0, \delta)$ тачке x_0 таква да је $f[U(x_0, \delta)] \subseteq U(y_0, \varepsilon')$. Дакле сложена функција $g(f(x))$ је дефинисана барем на δ-околини тачке x_0, и непрекидна је у тачки x_0 (види теорему 8.2).

Покажимо сада да функција $g(f(x))$ има извод у тачки x_0 и да важи формула из теореме. Разликоваћемо два случаја:

1° $f'(x_0) \neq 0$. Како је $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq 0$, то постоји шупља околина $\dot{U}(x_0)$ тачке x_0 у којој је $f(x) \neq f(x_0)$, тј. $f(x) \neq y_0$, за свако $x \in \dot{U}(x_0)$. Пошто је, такође,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = g'(y_0),$$

то из последице 8.9 следи да је

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(y_0)}{f(x)-y_0} = g'(y_0),$$

па је

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(y_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{g(f(x))-g(y_0)}{f(x)-y_0} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(y_0)}{f(x)-y_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(y_0)f'(x_0).\end{aligned}$$

2° $f'(x_0) = 0$. Узмимо произвољан низ (x_n) такав да је $(x_n) \to x_0$. Тада $(f(x_n)) \to y_0 = f(x_0)$. Разбијмо чланове низа $(f(x_n))$ на два подниза (један од њих може бити и коначан). У првом су сви они чланови низа који су једнаки $f(x_0)$, а у другом сви они који су $\neq f(x_0)$. Означимо их редом са $(f(x_{n'_k}))$ и $(f(x_{n''_k}))$, и за сваки од њих уочимо низове (a_k) и (b_k), где је

$$a_k = \frac{g(f(x_{n'_k}))-g(f(x_0))}{x_{n'_k}-x_0} \quad \text{и} \quad b_k = \frac{g(f(x_{n''_k}))-g(f(x_0))}{x_{n''_k}-x_0}.$$

Низ (a_k), ако је бесконачан, конвергира ка 0, јер су сви чланови овог низ једнаки 0. Низ (b_k), ако је бесконачан, такође конвергира ка 0, јер је

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{n''_k}))-g(f(x_0))}{x_{n''_k}-x_0} = \\ &\quad = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{g(f(x_{n''_k}))-g(f(x_0))}{f(x_{n''_k})-f(x_0)} \cdot \frac{f(x_{n''_k})-f(x_0)}{x_{n''_k}-x_0}\right] = g'(y_0)f'(x_0) = 0.\end{aligned}$$

Низ (z_n), где је $z_n = \dfrac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0}$, је нула низ, јер је сваки члан овог низа или члан низа (a_k), или члан низа (b_k), а сваки од последња два низа, ако је бесконачан, је нула низ. Пошто све ово важи за сваки низ (x_n) који конвергира ка x_0, онда је $(g\circ f)'(x_0) = 0$, па се тражена једнакост у теореми своди на једнакост $0 = 0$. □

Формула из претходне теореме се може написати у облику

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}, \quad \text{или} \quad z'_x = z'_y\, y'_x$$

(последњи запис је веома згодан, јер ми истом ознаком z означавамо две различите функције — $g(y)$ и $h(x)$, а променљива у индексу одговарајућег извода јасно указује на коју од њих мислимо). Ако имамо композицију не две, већ више функција, рецимо, три — $x = x(t)$, $y = y(x)$ и $z = z(y)$, онда ову формулу можемо проширити, и добијамо:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}.$$

Последица 1. [инваријантност форме првог диференцијала у односу на замену независне променљиве] *Ако функција $y = f(x)$ има извод у тачки x_0, а функција $z = g(y)$ има извод у тачки $y_0 = f(x_0)$, онда се диференцијал функције $z = h(x) = g[f(x)]$ у тачки x_0 може представити у облику*

$$dz = g'(y_0)\, dy = h'(x_0)\, dx, \tag{2}$$

где је $dy = f'(x_0)dx$ диференцијал функције $y = f(x)$ у тачки x_0, а dx диференцијал независне променљиве.

Доказ. Како је $dz = h'(x_0)\, dx$, а по претходној теореми $h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$, то је $dz = g'(f(x_0))f'(x_0)\, dx$. Сада пошто је $dy = f'(x_0)\, dx$, добијамо да је $dz = g'(y_0)\, dy$, што је и требало да се покаже. □

Смисао формуле (2) је следећи. Диференцијал функције је увек производ извода по некој променљивој и диференцијала од те променљиве, независно од тога да ли је променљива опет функција или независна променљива.

Пример 4. Нађимо извод од функције $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ у тачки x_0 у којој су функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ диференцијабилне и $\psi(x_0) > 0$.

Функција $\psi(x)$ је диференцијабилна у тачки x_0, па је у њој непрекидна, тј. важи $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = \psi(x_0) > 0$. Дакле, у некој околини тачке x_0 важи да је $\psi(x) > 0$, па је у некој околини тачке x_0 функција $y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ дефинисана.

Приметимо да је

$$y = \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)} = [\psi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e^{\frac{1}{\varphi(x)}\ln\psi(x)},$$

па је

$$y' = \left[e^{\frac{\ln\psi(x)}{\varphi(x)}}\right]' = e^{\frac{\ln\psi(x)}{\varphi(x)}} \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\varphi(x) - \varphi'(x)\ln\psi(x)}{\varphi^2(x)} =$$

$$= \sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left[\frac{\psi'(x)}{\psi(x)\varphi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^(x)}\ln\psi(x)\right].\square$$

Пример 5. Нађимо извод од функције $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x)$ у тачки x_0 у којој су функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ диференцијабилне и $\varphi(x_0) > 0$, $\varphi(x_0) \neq 1$ и $\psi(x_0) > 0$.

Из услова следи да је функција дефинисана у некој околини тачке x_0. Приметимо да је

$$y = \log_{\varphi(x)}\psi(x) = \frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)},$$

па је

$$y' = \left[\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}\right]' = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{[\ln\varphi(x)]^2}.\square$$

Дата је једначина

$$F(x,y) = 0. \tag{3}$$

и тачка $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ таква да је $F(x_0, y_0) = 0$. Ако постоје $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, тако да за свако $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ постоји само једна вредност $y = f(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ за коју важи да је $F(x, f(x)) = 0$, онда кажемо да је функција $y = f(x)$ задата у околини тачке (x_0, y_0) имплицитно једначином (3). Користећи теорему 2 можемо да нађемо и извод имплицитно задате функције.

Пример 6. Једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

задаје елипсу са полуосами a и b и центром у координатном почетку. Нађимо једначину тангенте на ову елипсу у њеној тачки $M_0(x_0, y_0)$. Горња једначина задаје имплицитно функцију y у околини сваке тачке елипсе различите од $(-a, 0)$ и $(a, 0)$. Нађимо извод леве и десне стране ове једначине, имајући у виду, да је y функција од x. Добијамо једначину

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Одавде је $y' = (-b^2/a^2)\,(x/y)$, па је једначина тражене тангенте

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0), \quad \text{т.ј.} \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Како је тачка $M_0(x_0, y_0)$ на елипси, то је десна страна једначине једнака 1, па је тражена једначина тангенте

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Приметимо да добијена формула даје правилан резултат и у тачкама $(-a, 0)$ и $(a, 0)$). $\square$

Напомена. Као што смо увели појам диференцијабилне функције у некој тачки, можемо увести и појам функције диференцијабилне слева [сдесна] у датој тачки. Кажемо да је функција $f(x)$ *диференцијабилна слева* [*сдесна*] у тачки x_0, ако је дефинисана у некој околини тачке $x_0 - 0$ [$x_0 + 0$] и за свако $\Delta x < 0$ [$\Delta x > 0$] прираштај функције $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ се може представити у облику

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

када $\Delta x \to -0$ [$\Delta x \to +0$], где је A нека реална константа. Линеарна функција $A\Delta x$ зове се тада *леви* [*десни*] *диференцијал*. Многе теореме које су важиле за диференцијал важе и за десни и леви диференцијал. Рецимо важи аналог теореме 2, који сада гласи овако: функција $f(x)$ је диференцијабилна слева [сдесна] у тачки x_0 акко има леви [десни] извод, и тада је

$$\Delta y = f'_-(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad [\Delta y = f'_+(x_0)\Delta x + o(\Delta x)].$$

Такође важе аналози последица 1–4 и теорема 3–7.

5.2. Изводи вишег реда

Нека је функција $f(x)$ таква да је изводна фунција $f'(x)$ дефинисана у некој околини тачке x_0. Ако функција $f'(x)$ има извод у тачки x_0, онда се тај извод зове *други извод* функције $f(x)$ у тачки x_0, и означава се са $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$. Дакле важи формула

$$f''(x_0) = [f'(x)]'_{x=x_0}.$$

Извод n-тог реда се даље уводи индуктивно. Ако у некој околини тачке x_0 постоји n-ти извод $f^{(n)}(x)$ функције $f(x)$, онда се $n+1$-ви извод ове функције у тачки x_0 дефинише формулом

$$f^{(n+1)}(x_0) = [f^{(n)}(x)]'_{x=x_0}.$$

Под 0-тим изводом функције подразумева се сама функција, тј. важи конвенција $f^{(0)}(x) = f(x)$.

На аналоган начин можемо увести појам левог [десног] n-тог извода функције $f(x)$ у тачки x_0. Наиме, претпоставимо да је функција f дефинисана у левој [десној] ε-околини тачке x_0, да је у одговарајућој шупљој околини дефинисан n-ти извод дате функције $g(x) = f^{(n)}(x)$ и да постоји вредност $g(x_0) = f_-^{(n)}(x_0)$ $[g(x_0) = f_+^{(n)}(x_0)]$. Тада, $n+1$-ви *леви* [*десни*] *извод* функције f у тачки x_0 је вредност задата формулом

$$f_-^{(n+1)}(x_0) = g'_-(x_0) \quad [f_+^{(n+1)}(x_0) = g'_+(x_0)].$$

Приметимо да ако постоји n-ти извод функције $f(x)$, где је $n \geq 2$, у тачки x_0, онда постоје $f^{(k)}(x)$ у некој околини тачке x_0 за свако $k \in \overline{n-1}$, и функција $f^{(k)}(x)$ је непрекидна у уоченој околини за свако $k \in \overline{n-2}$. Имајући ово у виду, корисно је увести следећи појам.

Функција $f(x)$ је *n пута непрекидно диференцијабилна* на неком интервалу, ако у свим тачкама тог интервала има непрекидне изводе закључно до n-тог реда.

Позабавимо се сада изводима вишег реда од суме и производа две функције.

Теорема 3. *Функције* $y_1 = f_1(x)$ *и* $y_2 = f_2(x)$ *имају изводе* n*-тог реда у тачки* x_0*; тада функција* $y = y_1 + y_2$ *има такође извод* n*-тог реда у тој тачки и важи формула*

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} + y_2^{(n)}.$$

Доказ. Докажимо формулу применом математичке индукције. Формула важи за $n = 1$. Претпоставимо да важи за n и покажимо да важи за $n + 1$. Имамо

$$\begin{aligned}(y_1 + y_2)^{(n+1)} = [(y_1 + y_2)^{(n)}]' = \left(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}\right)' = \\ = \left(y_1^{(n)}\right)' + \left(y_2^{(n)}\right)' = y_1^{(n+1)} + y_2^{(n+1)}. \square\end{aligned}$$

Теорема 4. [Формула Лајбница] *Функције* $y_1 = f_1(x)$ *и* $y_2 = f_2(x)$ *имају изводе* n*-тог реда у тачки* x_0*; тада функција* $y = y_1 y_2$ *има такође извод* n*-тог реда у тој тачки и важи формула*

$$(y_1 y_2)^{(n)} = y_1^{(n)} y_2 + C_n^1 y_1^{(n-1)} y_2^{(1)} + \cdots + y_1 y_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)},$$

где су C_n^k *биномни коефицијенти.*

Доказ. Докажимо формулу применом математичке индукције. Формула важи за $n = 1$, јер је $(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2'$. Претпоставимо да она важи за n и покажимо да важи и за $n+1$. Дакле имамо

$$\begin{aligned}
&(y_1y_2)^{(n+1)} = [(y_1y_2)^{(n)}]' = \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)}\right]' = \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(y_1^{(n-k+1)} y_2^{(k)} + y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k+1)} y_2^{(k)} + \\
&+ \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} = \\
&= y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} = \\
&= y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)}
\end{aligned}$$

(у извођену формуле користили смо једнакост $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$). $\square$

Последица 2. $(cy)^{(n)} = cy^{(n)}$.

Доказ. Формулу из тврђења добијамо када у Лајбницовој формули узмемо да је $y_1 = c$ и $y_2 = y$. $\square$

Пример 7. Размотримо степену функцију $y = x^\mu$. Ако је $\mu \notin \mathbf{N}$ или $n \le \mu$, онда важи формула

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

Покажимо ову формулу применом математичке индукције. Као што смо видели, из таблице основних извода формула важи за $n = 1$. Претпоставимо да важи за n и покажимо да важи за $n+1$. Али тада је

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)} &= \left(y^{(n)}\right)' = [\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}]' = \\
&= \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)\left(x^{\mu-n}\right)' = \\
&= \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)(\mu-n)\,x^{\mu-(n+1)}.
\end{aligned}$$

Није тешко видети и да за функцију $y = (a+bx)^\mu$ важи формула

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)b^n(a+bx)^{\mu-n}. \square$$

Пример 8. Посматрајмо сада функцију $y = \ln x$. Како је $y' = 1/x$, то је (користимо формулу из претходног примера за $\mu = -1$)

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}. \square$$

Пример 9. Лако се види да за експоненцијалну функцију $y = a^x$ важи да је

$$y^{(n)} = (\ln a)^n a^x.$$

Специјално добијамо да је $(e^x)^{(n)} = e^x$. $\square$

Пример 10. Нека је сада $y = \sin x$. Како је

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ y'' &= \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\ y''' &= \left[\sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\,\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

то није тешко приметити да је

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Слично се добија и формула

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \square$$

Пример 11. Нађимо n-ти извод функције $y = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$. Није тешко видети да се ова функција може представити у облику

$$y = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\left[(x-a)^{-1} - (x+a)^{-1}\right],$$

па применом формуле из примера 8 добијамо

$$\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]. \square$$

Пример 12. Нађимо n-ти извод функције $y = e^{ax}\sin(bx + c)$. Први извод ове функције је

$$\begin{aligned}
y' &= ae^{ax}\sin(bx+c) + be^{ax}\cos(bx+c) = \\
&= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right] = \\
&= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\left[\cos\varphi\sin(bx+c) + \sin\varphi\cos(bx+c)\right] = \\
&= \sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin(bx+c+\varphi),
\end{aligned}$$

где је угао φ такав да је

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ако сада у изразу за y' узмемо да је $c' = c + \varphi$, одмах добијамо да је

$$y'' = (y')' = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 e^{ax}\sin(bx+c'+\varphi) = \left(a^2+b^2\right)e^{ax}\sin(bx+c+2\varphi).$$

Одавде није тешко закључити да важи формула

$$y^{(n)} = \left(a^2+b^2\right)^{n/2} e^{ax}\sin(bx+c+n\varphi). \square$$

Пример 13. Нађимо вредност n-тог извода функције $y = \operatorname{arctg} x$ у тачки $x = 0$; означимо ту вредност са $y_0^{(n)}$. Приметимо да је $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, односно, $y'(1+x^2) = 1$. Ако сада од обе стране последње једнакости узмемо n-ти извод, примењујући Лајбницову формулу при израчунавању n-тог извода леве стране, добијамо

$$y^{(n+1)}(1+x^2) + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0.$$

Ако у добијеној једнакости ставимо да је $x = 0$ добијамо да је

$$y_0^{(n+1)} + n(n-1)y_0^{(n-1)} = 0, \quad \text{тј.} \quad y_0^{(n+1)} = -n(n-1)y_0^{(n-1)}.$$

Како је у тачки $x = 0$ вредност извода $y'' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ једнака нули, то из добијене формуле следи да за свако природно m важи да је

$$y_0^{(2m)} = 0,$$

а како је $y_0' = 1$, то имамо да је

$$y_0^{(2m+1)} = (-1)^m(2m)!, \quad \text{односно}, \quad y_0^{(2m-1)} = (-1)^{m-1}(2m-2)!$$

за сваки природан број m, јер је $0! = 1$. $\Box$

Размотримо, сада, изводе вишег реда од сложених, инверзних и параметарски задатих функција.

Теорема 5. *Ако функција $y = y(x)$ има други извод у тачки x_0, а функција $z = z(y)$ други извод у тачки $y_0 = y(x_0)$, тада сложена функција $z(y(x))$ има други извод у тачки x_0 и важи формула*

$$z''_{xx} = z''_{yy} {y'_x}^2 + z'_y y''_{xx}.$$

Доказ. Пошто постоји $y''_{xx}(x_0)$ $[z''_{yy}(y_0)]$, то постоји први извод y'_x $[z'_y]$ у некој околини тачке x_0 $[y_0]$, а одавде следи да је функција $y(x)$ $[z(y)]$ дефинисана и непрекидна у некој околини тачке x_0 $[y_0]$. Из непрекидности функција $y(x)$ и $z(y)$ редом у тачкама x_0 и $y_0 = f(x_0)$ следи да је сложена функција $z(y(x))$ постоји (и непрекидна је) у тачки x_0. Из теореме 2 следи да да је $z'_x = z'_y y'_x$. Приметимо да на композицију функција $z'_y(y)$ и $y(x)$ такође можемо применити теорему 2, па добијамо

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (z'_y y'_x)'_x = (z'_y)'_x y'_x + z'_y (y'_x)'_x = z''_{yy} {y'_x}^2 + z'_y y''_{xx}. \Box$$

Сада ако претпоставимо да постоје z'''_{yyy} и y'''_{xxx}, онда можемо наћи и z'''_{xxx}. Имамо:

$$\begin{aligned} z'''_{xxx} &= (z''_{xx})'_x = (z''_{yy} {y'_x}^2 + z'_y y''_{xx})'_x = \\ &= z'''_{yyy} {y'_x}^3 + z'_{yy} 2 y'_x y''_{xx} + z''_{yy} y'_x y''_{xx} + z'_y y'''_{xxx} = \\ &= z'''_{yyy} {y'_x}^3 + 3 z'_{yy} y'_x y''_{xx} + z'_y y'''_{xxx}. \end{aligned}$$

Теорема 6. *Нека је функција $y = y(x)$ непрекидна и строго монотона у некој околини тачке x_0, и нека за $x = x_0$ постоје изводи y' и y'', и при томе је $y'(x_0) \neq 0$; тада и инверзна функција $x = x(y)$ има други извод у тачки $y_0 = y(x_0)$ и важи формула*

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{y'^2}.$$

Доказ. Од раније знамо да је $x'_y = 1/y'_x$, па је $(x'_y)'_y = (1/y'_x)'_y$. Ако сада извод са десне стране ове једнакости схватимо као извод од сложене функције, добијамо

$$x''_{yy} = (x'_y)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x x'_y = \left(-\frac{1}{{y'_x}^2}\right) y''_{xx} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{{y'_x}^3}. \square$$

Слично имамо:

$$x'''_{yyy} = \left(-\frac{y''_{xx}}{{y'_x}^3}\right)'_x \cdot x'_y = -\frac{y'''_{xxx}{y'_x}^3 - y''_{xx}3{y'_x}^2 y''_{xx}}{{y'_x}^6} \cdot \frac{1}{y'_x} =$$
$$= -\frac{y'''_{xxx}{y'_x}^3 - 3{y''_{xx}}^2{y'_x}^2}{{y'_x}^7}.$$

Уведимо сада појам параметарски задате функције. Нека су функције $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дефинисане у некој околини тачке t_0, и нека је једна од њих, на пример, $x(t)$ непрекидна и строго монотона у уоченој околини. Тада постоји инверзна функција $t = t(x)$ за функцију $x = x(t)$ у околини тачке $x_0 = x(t_0)$ и има смисао композиција $y(t(x))$. Управо за функцију $y(t(x))$ кажемо да је *функција параметарски задата једначинама* $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Теорема 7. *Ако функције $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имају у тачки t_0 извод и $x'(t_0) \neq 0$, онда и функција $y(t(x))$, параметарски задата једначинама $x = x(t)$ и $y = y(t)$, има у тачки $x_0 = x(t_0)$ извод и важи формула*

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

Доказ. Из теореме 2 добијамо

$$[y(t(x))]'_{x=x_0} = y'_t(t(x_0))t'_x(x_0).$$

Сада формула из теореме следи из једнакости

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \square$$

Сада можемо израчунати и

$$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{{x'_t}^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{{x'_t}^3}.$$

5.3. Диференцијал вишег реда

У овом поглављу ћемо означавати диференцијал како уз помоћ симбола d, тако и уз помоћ симбола δ. Тако ћемо, рецимо, уместо dx и dy писати слободно и δx и δy. Ово чинимо да би смо лакше објаснили појам диференцијала вишег реда.

Нека је функција $y = f(x)$ диференцијабилна на интервалу (a, b). Тада је први диференцијал $dy = f'(x)\,dx$ функција од две променљиве x и dx. Ако је извод $f'(x)$ диференцијабилан у некој тачки $x_0 \in (a, b)$, онда, сматрајући да ова функција зависи само од x и да је dx фиксирано (касније ћемо видети да се уствари овде ради о парцијалном изводу по променљивој x), диференцијал од функције dy је

$$\delta(dy) = \delta[f'(x)dx]\big|_{x=x_0} = \delta[f'(x)dx]'\big|_{x=x_0}\,\delta x = f''(x_0)\,dx\,\delta x.$$

Вредност $\delta(dy)$ у некој тачки x_0, када се узме да је $\delta x = dx$, се зове други диференцијал функције $f(x)$ у тој тачки и означава се са d^2y. Дакле,

$$d^2y = f''(x_0)dx^2$$

(овде је $dx^2 = (dx)^2$). Уместо ознаке d^2y користимо и ознаку $d^2f(x_0)$, ако желимо да нагласимо у којој тачки се посматра други диференцијал. Приметимо да је $d^2x = 0$.

Индуктивним путем сада можемо увести појам диференцијала n-тог реда функције $y = f(x)$. Нека је извод $(n-1)$-вог реда $y^{(n-1)}$ функције $y = f(x)$ диференцијабилан у тачки x_0. Тада је диференцијал n-тог реда d^ny функције $y = f(x)$ у тачки x_0 први диференцијал $\delta(d^{n-1}y)$ од диференцијала $n-1$-вог реда $d^{n-1}y$ ове функције у датој тачки у којем је узето да је $\delta x = dx$. Дакле,

$$d^ny = \delta(d^{n-1}y)\big|_{\delta x = dx}.$$

Применом математичке индукције покажимо да важи формула

$$d^ny = y^{(n)}\,dx^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

За $n = 1$ и $n = 2$ ова формула већ је доказана. Тада по дефиницији, ако претпоставимо да формула важи за $n-1$, имамо:

$$\delta(d^{n-1}y) = \delta(y^{(n-1)}\,dx^{n-1}) = y^{(n)}\,\delta x\,dx^{n-1}.$$

Ако узмемо сада да је $\delta x = dx$, добијамо да важи тражена формула.

Из доказане формуле следи да се n-ти извод функције $y = f(x)$ може представити у облику

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Није тешко видети да важе следеће формуле:

1° $d^n(y_1 + y_2) = d^n y_1 + d^n y_2$;

2° $d^n(cy) = cd^n y$, где је c константа;

3° $d^n(y_1 y_2) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} y_1 d^k y_2$.

Последња формула је *Лајбницова формула* за n-ти диференцијал од производа две функције.[1]

Приметимо да за разлику од првог диференцијала диференцијал вишег реда, почев већ од другог, не поседује својство инваријантности. Наиме, нека су $z = z(y)$ и $y = y(x)$ две два пута диференцијабилне функције, и нека има смисла композиција $z = z(y(x))$. Тада је

$$dz = z'_y \, dy.$$

Сада ћемо, једноставности ради, користити ознаку $d(dz)$ уместо $\delta(dz)|_{\delta x = dx}$. Дакле, имамо

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_y \, dy) = dz'_y \, dy + z'_y d(dy) = z''_{yy} \, dy^2 + z'_y d^2 y.$$

[1] Интересантно је да је Лајбниц своју формулу управо и формулисао за диференцијал, а не за извод.