Лекција 4

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАЧУН

▶ Појам извода
▶ Таблица основних извода
▶ Диференцијал функције
▶ Основна правила за израчунавање извода
▶ Геометријски и физички смисао извода и диференцијала

4.1. Појам извода

Ако је реална функција реалне променљиве $y = f(x)$ дефинисана у некој околини тачке x_0, онда је функција $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ дефинисана у одговарајућој шупљој околини тачке x_0, па има смисла говорити о граничној вредности

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Ако овај лимес постоји онда се његова вредност означава са $f'(x_0)$ и зове се *извод функције* $f(x)$ *у тачки* x_0. Разлику $\Delta x = x - x_0$ зовемо *прираштај независне променљиве*, а разлику

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

зовемо *прираштај функције*. Тада имамо да је

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

Процес тражења извода функције f у тачки x_0 зовемо њеним *диференцирањем* у задатој тачки. Ако је из контекста јасно у којој тачки посматрамо извод функције $y = f(x)$, онда често означавамо њен извод само са y', или са y'_x (последња ознака је згодна у случајевима када из неког разлога хоћемо да нагласимо по којој променљивој вршимо диференцирање).

За сада смо претпостављали да је извод $f'(x_0)$ коначан број, али понекада је згодно посматрати и случај такозваног *бесконачног извода* (*одређеног знака*), када је вредност лимеса (1), сада уопштеног, једнака $-\infty$ или $+\infty$ (искључујемо случај, када је вредност овог лимеса ∞).

Извод о коме смо досад говорили је такозвани *двострани*. Можемо увесту и појам *једностраног извода*. Претпоставимо да је функција дефинисана у некој левој [десној] околини $U(x_0-0)$ [$U(x_0+0)$] тачке x_0. Ако постоји коначан или бесконачан (једнак или $-\infty$, или $+\infty$) лимес

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\qquad\left[\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right],$$

онда се његова вредност зове *леви* [*десни*] извод функције $f(x)$ у тачки x_0 и означава се са $f'_-(x_0)$ [$f'_+(x_0)$]. Из теореме 8.21 и дефиниције директно следи тврђење:

Теорема 1. *Функција $f(x)$ има извод у тачки x_0 акко постоје једнострани изводи и једнаки су, и тада је $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$.*

Ако је функција дефинисана на неком скупу $X\subseteq\mathbf{R}$, а извод те функције постоји у неким тачкама тог скупа, онда можемо да говоримо о изводној функцији $f'(x)$. У принципу можемо да говоримо о изводној функцији која је дефинисана и само у коначном броју тачака, али како обично "имамо посла" са елементарним функцијама, изводна функција је скоро свуда на њиховом домену дефинисана, а тачака у којима она није дефинисана је коначно.

Пример 1. Покажимо по дефиницији да је изводна функција, или, просто, извод, константне функције $y=C$, где је C неки реалан број, функција $y'=0$. Тражимо извод у произвољној тачки x. Како је $\Delta y=0$ за свако Δx, то је $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x=0\,.\square$

Пример 2. Нађимо сада извод функције $y=\sin x$ у произвољној тачки $x\in\mathbf{R}$ по дефиницији. Добијамо

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\Delta x/2\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\,.\square$$

Пример 3. Нађимо по дефиницији извод степене функције $y = x^n$ $(n \in \mathbf{N})$ у произвољној тачки $x \in \mathbf{R}$. Како је

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta x^2 + \dots\,,$$

то је

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta x + \dots \right) = nx^{n-1}\,.\square$$

Пример 4. Треба наћи извод функције $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, где је функција $\varphi(x)$ непрекидна у тачки $x = a$.

Из дефиницији извода имамо

$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} &= \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a + \Delta x - a)\varphi(a + \Delta x) - (a - a)\varphi(x)}{\Delta x} &= \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\, \varphi(a + \Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(a + \Delta x) = \varphi(a), \end{aligned}$$

јер је функција $\varphi(x)$ непрекидна у тачки $x = a$. $\square$

Пример 5. Покажимо да функција

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ако је } x \text{ рационалан број;} \\ 0, & \text{ако је } x \text{ ирационалан број} \end{cases}$$

има извод само у тачки 0.

По дефиницији

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Али како је

$$0 \le \left| \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \right| \le \frac{\Delta x^2}{|\Delta x|} = |\Delta x|,$$

и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0$, то из теореме 8.22 следи да је и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left| \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \right| = 0$. Сада из теореме 8.34 следи да је $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Покушајмо сада по дефиницији да нађемо извод у некој тачки $x_0 \neq 0$. Дакле

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} g(x),$$

где је $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Претпоставимо прво да је тачка x_0 рационалан број. Узмимо низ (x_n) такав да $(x_n) \to x_0$ и x_n је рационално за свако n. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + x_0) = 2x_0$. Узмимо сада низ (x'_n) такав да $(x'_n) \to x_0$ и x'_n је ирационално за свако n. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} [-x_0^2/(x_n - x_0)] = \infty$. Одавде закључујемо да у рационалним тачкама функција $f(x)$ нема извода.

Сада претпоставимо да је x_0 ирационалан. Узмимо низ (x_n) такав да $(x_n) \to x_0$ и x_n је рационално за свако n. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} [x_n^2/(x_n - x_0)] = \infty,$$

па функција $f(x)$ у ирационалним тачкама нема извод. □

4.2. Таблица основних извода

Дајмо таблицу извода основних елементарних функција. Применом основних правила диференцирања и ове таблице тражићемо изводе свих осталих елементарних функција. Дакле, имамо:

$1^\circ\ y = c$	$y' = 0$
$2^\circ\ y = x^r \quad (x > 0, r \in \mathbf{R})$	$y' = rx^{r-1}$
$3^\circ\ y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$y' = a^x \ln a$
$4^\circ\ y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$y' = \dfrac{\log_a e}{x}$
$5^\circ\ y = \sin x$	$y' = \cos x$
$6^\circ\ y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$7^\circ\ y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$8^\circ\ y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

9° $y = \arcsin x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10° $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11° $y = \operatorname{arctg} x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

12° $y = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Тако, рецимо, из 2° следи да функција $y = x$ има извод $y' = 1$, функција $y = 1/x$ има извод $y' = -1/x^2$, а функција $y = \sqrt{x}$ има извод $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Из 3° следи специјално да је извод од функције $y = e^x$ функција $y' = e^x$, а из 4° да је извод функције $y = \ln x$ функција $y' = 1/x$.

Из примера 1 следи да важи 1°. Покажимо 2°. Узмимо произвољан реалан позитиван број x. Из дефиниције следи да је

$$(x^r)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^r - x^r}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} x^{r-1} \frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^r - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} = r x^{r-1}\,.$$

Покажимо сада 3°. Узмимо произвољно реално x. Из дефиниције извода имамо

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a\,.$$

Тврђење 4° следи из

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\log_a e}{x}\,.$$

Тврђење 5° следи из примера 2, а тврђење 6° се показује анал-ог-но. Покажимо 7°. Из дефиниције имамо

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x)-\operatorname{tg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\Delta x}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\Delta x}-\operatorname{tg} x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}\Delta x}{(1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\Delta x)\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos\Delta x}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\Delta x}\right] = \frac{1}{\cos^2 x}\,.\end{aligned}$$

Тврђење 8° се аналогно показује као тврђење 7°. Како наћи изводе од инверзних тригонометријских функција видећемо касније.

4.3. Диференцијал функције

Функција $f(x)$, дефинисана у околини тачке x_0, је *диференцијабилна у тачки* x_0, ако је прираштај функције

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

могуће представити у облику

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x), \tag{3}$$

где је A реална константа, која зависи само од избора тачке x_0, и $\alpha = \alpha(\Delta x)$ функција од Δx таква да је $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$, када $\Delta x \to 0$. Линеарна функција $A\Delta x$ се зове *диференцијал* функције f у тачки x_0 и означава се са $df(x_0)$, или, ако је из контекста јасно у којој тачки посматрамо диференцијал, само са dy. Дакле, у случају да је функција $f(x)$ диференцијабилна у тачки x_0, имамо да је

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \text{када} \quad \Delta x \to 0.$$

Приметимо да је dy као линеарна функција од Δx дефинисана за свако $\Delta x \in (-\infty, +\infty)$, док је прираштај функције $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ дефинисан само за вредности Δx за које тачка $x_0 + \Delta x$ припада области дефинисаности функције $f(x)$.

Прираштај променљиве x у формули $dy = A\,\Delta x$, се обележава са dx, и зове се диференцијал независне променљиве x. Ово чинимо у складу са традицијом, а она је диктирана пре свега разлозима симетрије, јер се тада формула за диференцијал може написати у облику

$$dy = A\,dx.$$

Пример 6. Нађимо диференцијал функције $y = \cos x$ у произвољној тачки x. Имамо

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2) = \\
&= -2(\sin x\cos(\Delta x/2)\sin(\Delta x/2) + \cos x\sin(\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)) = \\
&= -\sin x\sin\Delta x + \cos x\sin^2(\Delta x/2) = \\
&= -\sin x\Delta x + (\Delta x - \sin\Delta x)\sin x + \cos x\sin^2(\Delta x/2).
\end{aligned}$$

Приметимо да је

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x - \sin\Delta x)\sin x + \cos x\sin^2(\Delta x/2)}{\Delta x} = \\
&\qquad = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x - \sin\Delta x}{\Delta x}\sin x + \frac{1}{4}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\frac{\sin^2(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)^2}\cos x = 0,
\end{aligned}$$

па је $(\Delta x - \sin\Delta x)\sin x + \cos x\sin^2(\Delta x/2) = o(\Delta x)$, када $\Delta x \to 0$. Дакле, $dy = -\sin x\,dx$. $\Box$

Теорема 2. *Функција $f(x)$ је диференцијабилна у тачки x_0 ако и само ако она има извод у тачки x_0, и тада важи*

$$dy = f'(x_0)\,dx.$$

Доказ. Претпоставимо прво да је функција диференцијабилна у тачки x_0. Тада прираштај функције у тачки x_0 можемо представити у облику

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

где је A реална константа, која зависи само од избора тачке x_0, и $\alpha = \alpha(\Delta x)$ функција од Δx таква да је $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$, када $\Delta x \to 0$. Поделимо обе стране ове једнакости са Δx. Добијамо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x},$$

а одавде је лимес када $\Delta x \to 0$ леве и десне стране једнак, тј. добијамо да је

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = A + 0 = A.$$

Ако је $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, онда из теореме 8.32 имамо да је

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \beta(\Delta x),$$

где $\beta(\Delta x) \to 0$, када $\Delta x \to 0$. Множећи са Δx обе стране последње једнакости добијамо да је

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x). \square$$

Како је извод, ако постоји у некој тачки, јединствен, то из претходне теореме следи

Последица 1. *Ако постоји диференцијал функције у некој тачки, то је он јединствен.*

Из Теореме 2 следи и да се извод може представити у облику

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Теорема 3. *Ако је функција диференцијабилна у некој тачки, онда је она непрекидна у тој тачки.*

Доказ. Нека је функција $y = f(x)$ диференцијабилна у тачки x_0. Тада је

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (A\Delta x + \alpha(\Delta x)) = 0,$$

па је

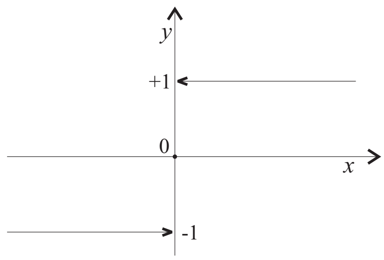
$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

што доказује наше тврђење. $\square$

Последица 2. *Ако функција у некој тачки има извод, онда је она непрекидна у тој тачки.*

Доказ. Нека функција $y = f(x)$ има извод у тачки x_0. Тада из Теореме 2 следи да је функција $y = f(x)$ диференцијабилна у тачки x_0. Али онда из Теореме 3 следи да је она непрекидна у тачки x_0. $\square$

Пример 7. Рецимо сада можемо одмах да утврдимо да функција $y = \operatorname{sgn} x$ нема извод у тачки $x = 0$, јер је она у тој тачки прекидна (види слику). Интересантно је приметити да у ма колико блиским тачкама и слева и с десна тачки 0 је извод ове функције 0, али то не значи да је леви и десни, а самим тим и обострани извод, у тој тачки једнак 0. Ако по дефиницији тражимо ове изводе видећемо да они не постоје. $\square$



Из следећег примера се види да тврђење обрнуто тврђењу Последице 2 у општем случају не важи.

Пример 8. Посматрајмо функцију $y = |x|$. Ова функција је, очигледно, непрекидна у тачки $x = 0$, али у њој нема извод, мада, у овој тачки ова функција има леви извод једнак -1 и десни извод једнак 1. $\square$

Ако је у формули (3) прираштај аргумента Δx јако мали, онда је други члан с десне стране једнакости — $\alpha(\Delta x)$ јако мали, па се можемо послужити при рачунању вредности диференцијабилне функције $f(x)$ следећом приближном формулом

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x, \tag{4}$$

односно

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Формула (4) се може интерпретирати и другачије. Рецимо, мерењем неке величине уместо *тачне вредности* a добили смо њену *приближну вредност* a^*. Тада се грешка $\Delta_{a^*} = |a - a^*|$, коју чинимо при томе, зове *апсолутна грешка приближног броја* a^*. Готово увек имамо ситуацију да ни тачна вредност a, ни апсолутна грешка приближне вредности Δ_{a^*} нису нам познате, нити су нам доступне. Најчешће смо у стању само да одредимо од чега апсолутна грешка приближног броја није сигурно већа. Број A_{a^*} такав да је $|a - a^*| \leq A_{a^*}$ зове се *граница апсолутне грешке приближног броја* a^*.

Претпоставимо да је потребно израчунати вредност $f(a)$ функције f у тачки $x = a$. Али ми уместо ње у стању смо да израчунамо само *приближну вредност функције* — вредност $f(a^*)$. Треба проценити грешку коју чинимо када тражену вредност $f(a)$ замењујемо са нама доступном вредношћу $f(a^*)$, т.ј. треба наћи такозвану *границу апсолутне грешке приближне вредности функције* $A_{f(a^*)}$ за коју је задовољено да је $|f(a)-f(a^*)| \leq A_{f(a^*)}$, јер *апсолутну грешку приближне вредности функције* $\Delta_{f(a^*)} = |f(a) - f(a^*)|$ најчешће нисмо у стању да одредимо. Приметимо да ако означимо са $\Delta x = a - a^*$, онда је $|\Delta x| \leq A_{a^*}$, па из формуле (4) је

$$|f(a) - f(a^*)| \approx |f'(a^*)|\,|\Delta x| \leq |f'(a^*)|\,A_{a^*}.$$

Дакле, можемо узети да је

$$A_{f(a^*)} = |f'(a^*)|\,A_{a^*}.$$

Пример 9. Период осцилација клатна одређује се формулом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где је l дужина клатна, а $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ — убрзање силе земљине теже. Треба одредити колико је потребно изменити дужину клатна $l = 0.2\,\mathrm{m}$ да би се период осцилација увећао за $0.05\,\mathrm{s}$.

Из формуле (4) добијамо

$$\Delta T = \pi\sqrt{\frac{1}{lg}}\Delta l,$$

па је

$$\Delta l = \frac{\Delta T\sqrt{lg}}{\pi} \approx 0.022\,\mathrm{m}. \square$$

4.4. Основна правила за израчунавање извода

Теорема 4. *Ако су функције $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ диференцијабилне у тачки x_0, тада је и функција $y_1+y_2 = f_1(x)+f_2(x)$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи формула*

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'.$$

Доказ. Нека је $y = f_1(x) + f_2(x)$. Како је

$$\begin{aligned} \Delta y &= [f_1(x_0+\Delta x) + f_2(x_0+\Delta x)] - [f_1(x_0) + f_2(x_0)] = \\ &= [f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)] + [f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0)] = \Delta y_1 + \Delta y_2, \end{aligned}$$

то је

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0.$$

Како су функције y_1 и y_2 диференцијабилне у тачки x_0, то из последње једнакости следи да је

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_1' + y_2'. \Box$$

Теорема 5. *Ако су функције $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ диференцијабилне у тачки x_0, тада је и функција $y_1 y_2 = f_1(x) f_2(x)$ диференцијабилна у тачки x_0 и важи формула*

$$(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2'.$$

Доказ. Приметимо да је

$$\begin{gathered} f_1(x_0+\Delta x) f_2(x_0+\Delta x) - f_1(x_0) f_2(x_0) = [f_1(x_0+\Delta x) f_2(x_0+\Delta x) - \\ - f_1(x_0) f_2(x_0+\Delta x)] + [f_1(x_0) f_2(x_0+\Delta x) - f_1(x_0) f_2(x_0)] = \\ = f_2(x_0+\Delta x)[f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)] + f_1(x_0)[f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0)], \end{gathered}$$

па је

$$\begin{aligned} &\frac{f_1(x_0+\Delta x) f_2(x_0+\Delta x) - f_1(x_0) f_2(x_0)}{\Delta x} = \\ &\qquad = f_2(x_0+\Delta x) \frac{f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)}{\Delta x} - f_1(x_0) \frac{f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Из диференцијабилности функције $f_2(x)$ у тачки x_0, следи да је функција $f_2(x)$ непрекидна у тачки x_0, односно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f_2(x_0+\Delta x) = f(x_0)$, па наше тврђење добијамо када применимо лимес када $\Delta x \to 0$ на леву и десну страну последње једнакости. $\Box$

Теорема 6. *Ако су функције* $y_1 = f_1(x)$ *и* $y_2 = f_2(x)$ *диференцијабилне у тачки* x_0 *и* $f_2(x_0) \neq 0$, *тада је и функција* $y_1/y_2 = f_1(x)/f_2(x)$ *диференцијабилна у тачки* x_0 *и важи формула*

$$(y_1/y_2)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2}. \tag{5}$$

Доказ. Како је функција $f_2(x)$ диференцијабилна у x_0, она је и непрекидна у x_0, па из услова $f_2(x_0) \neq 0$ следи да је $f_2(x) \neq 0$ у некој околини $U(x_0)$ тачке x_0, тј. функција $f_1(x)/f_2(x)$ је дефинисана барем на скупу $U(x_0)$. Такође приметимо да је

$$\frac{f_1(x_0+\Delta x)}{f_2(x_0+\Delta x)} - \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} = \\ = \frac{f_2(x_0)[f_1(x_0+\Delta x) - f_1(x_0)] - f_1(x_0)[f_2(x_0+\Delta x) - f_2(x_0)]}{f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)},$$

па је

$$\frac{\frac{f_1(x_0+\Delta x)}{f_2(x_0+\Delta x)} - \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}}{\Delta x} = \\ = \frac{f_2(x_0)\frac{f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)}{\Delta x} - f_1(x_0)\frac{f_2(x_0+\Delta x)-f_2(x_0)}{\Delta x}}{f_2(x_0+\Delta x) f_2(x_0)}.$$

Тражено тврђење добијамо применом лимеса, када $\Delta x \to 0$, на леву и десну страну ове једнакости. $\square$

Пример 10. Израчунајмо поново извод функције $y = \operatorname{tg} x$. Применом формуле из претходне теореме имамо

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \square$$

Последица 3. $(cy)' = cy'$.

Доказ. Тврђење следи из теореме 5 и чињенице да је $c' = 0$ за свако реално c. $\square$

Последица 4. *Нека су функције* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *диференцијабилне у тачки* x_0 *и* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *произвољни реални бројеви. Извод од линеарне комбинације функција* $c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ *у тачки* x_0 *је линеарна комбинација извода* $c_1y_1' + c_2y_2' + \cdots + c_ny_n'$.

Доказ. Тврђење следи из теореме 4 и последице 3. $\square$

Правила слична овим која важе за извод функције можемо извести за диференцијал.

Теорема 7. *Ако су функције* y_1, y_2, y_3 *и* y_4 *диференцијабилне у тачки* $x = x_0$ *и* $y_4(x_0) \neq 0$, *тада имамо:*

$$d(y_1 + y_2) = dy_1 + dy_2, \quad d(y_1y_2) = y_2\,dy_1 + y_1\,dy_2, \quad d(cy_1) = c\,dy_1,$$

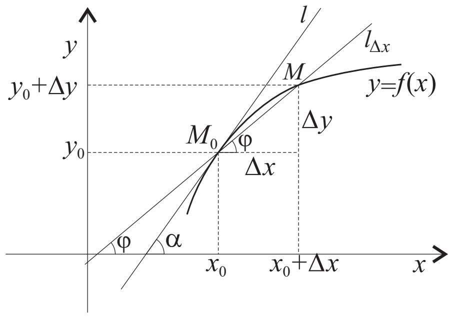
$$d\left(\frac{y_3}{y_4}\right) = \frac{y_4\,dy_3 - y_3\,dy_4}{y_4^2}.$$

Доказ. Докажимо, рецимо, последњу једнакост. Као и у теореми 6 из услова нашег тврђења следи да је функција y_3/y_4 дефинисана у некој околини тачке $x = x_0$ и да важи формула (5), па из теореме 2 имамо

$$\begin{aligned} d\left(\frac{y_3}{y_4}\right) = \left(\frac{y_3}{y_4}\right)' dx = \frac{y_3'y_4 - y_3y_4'}{y_4^2}\,dx = \\ = \frac{y_3'y_4\,dx - y_3y_4'\,dx}{y_4^2} = \frac{y_4\,dy_3 - y_3\,dy_4}{y_4^2}. \square \end{aligned}$$

4.5. Геометријски и физички смисао извода и диференцијала

Дата је диференцијабилна у тачки x_0 функција $y = f(x)$. Нека је $\Delta x \neq 0$ нека мала вредност таква да $x_0 + \Delta x$ припада домену функције $f(x)$. Означимо тачке (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, где је $y_0 = f(x_0)$ и $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, на графику дате функције редом са M_0 и M. Како је $\Delta x \neq 0$, тачке M_0 и M одређују праву $l_{\Delta x}$ — *сечицу* криве $y = f(x)$ одређену овим тачкама. Приметимо (види слику) да је коефицијенат правца ове праве $k(\Delta x) = \Delta y / \Delta x$, односно да је њена једначина



$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0.$$

Као што знамо, овај коефицијент правца је једнак тангенсу угла који затвара ова права са позитивним делом x-осе.

Сада претпоставимо да $\Delta x \to 0$. Покажимо да тада $d(M_0, M) \to 0$, где је $d(M_0, M)$ растојање између тачака M_0 и M (у овом случају кажемо да тачка M тежи ка тачки M_0, и то означавамо и са $M \to M_0$). Растојање између тачака M и M_0 се може рачунати по формули

$$d(M_0, M) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Како је дата функција диференцијабилна у x_0, то је она и непрекидна у овој тачки, па $\Delta y \to 0$, када $\Delta x \to 0$. Дакле

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0,$$

т.ј. $d(M_0, M) \to 0$, када $\Delta x \to 0$. Пустимо сада да $\Delta x \to 0$. Тада се права l дефинисана граничним положајем сечице $l_{\Delta x}$, када $\Delta x \to 0$, зове *тангента* на график функције $f(x)$ у тачки M_0. Њен коефицијент правца је, ако овај гранични положај сечице заиста постоји, очигледно, једнак

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ако је функција диференцијабилна у x_0, овај лимес постоји и он је једнак $f'(x_0)$. Дакле једначина тангенте на дату функцију у тачки

$M_0(x_0, f(x_0))$ је

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Дакле, геометријски смисао извода у тачки x_0 је следећи: $f'(x_0)$ је тангенс угла који затвара тангента на график функције $f(x)$ у тачки $M_0(x_0, f(x_0))$ са позитивним правцем x-осе.

Ако је лимес $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ једнак $-\infty$ или $+\infty$, онда је тангента паралелна y-оси, јер је одговарајући угао у том случају $-\pi/2$ или $+\pi/2$.

Пример 11. И тако, видели смо да је

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

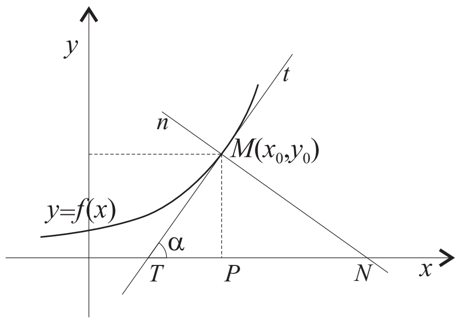
једначина тангенте t на криву $y = f(x)$ у тачки $M(x_0, y_0)$ ове криве. Права која пролази кроз тачку M_0 и нормална је на тангенту у тој тачки се зове *нормала* на дату криву у задатој њеној тачки. Од раније знамо да су две праве $y = a_1x + b_1$ и $y = a_2x + b_2$ нормалне акко је $a_1a_2 = -1$. Дакле једначина нормале n на криву $y = f(x)$ у тачки $M_0(x_0, y_0)$ је

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Тангента t сече осу x у тачки T, а нормала n у тачки N (види слику). Означимо са P тачку $(x_0, 0)$. Тада се дуж MT зове *одсечак тангенте*, дуж MN — *одсечак нормале*, дуж TP — *подтангента*, а дуж PN — *поднормала* у тачки графика (x_0, y_0).

Приметимо да је $|y|/TP = \operatorname{tg}\alpha$, па је

$$TP = \left|\frac{y}{y'}\right|.$$



Из Питагорине теореме у троуглу $\triangle MPT$ следи да важи

$$MT = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}} = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1 + y'^2}.$$

Из сличности троуглова $\triangle MTP$ и $\triangle MPN$ следи релација $MP^2 = TP \cdot PN$. Дакле, имамо да је

$$PN = \frac{|y|^2}{|y/y'|} = |yy'|$$

Напокон, из Питагорине теореме у троуглу $\triangle MPN$ добијамо да је

$$MN = \sqrt{y^2 y'^2 + y^2} = |y|\sqrt{1 + y'^2}. \square$$

Геометријски смисао диференцијала се састоји у следећем. Када рачунамо вредност функције $y = f(x)$, диференцијабилне у некој тачки x_0, у тачки $x_0 + \Delta x$ блиској тачки x_0, то можемо сматрати да је та вредност једнака $y^* = y_0 + dy$. Грешка коју при томе чинимо је бесконачно мала вишег реда од $\Delta x = x - x_0$, када $x \to x_0$, т.ј.

$$f(x) - y^* = o(x - x_0).$$

Дакле, у малој околини тачке x_0 ми график функције замењујемо (апроксимирамо) графиком тангенте на график функције $f(x)$ у тачки $(x_0, f(x_0))$.

Физика је препуна примера који илуструју примену извода и диференцијала. Општи физички смисао извода могао би се сажети у следећем. Нека физичка величина y зависи од параметра x, т.ј. $y = f(x)$. Тај параметар може бити време, температура, растојање од неке фиксиране тачке итд. И нека се промена ове величине посматра на интервалу $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Тада се величина

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

зове *средња брзина* промене величине y у односу на x на задатом интервалу, а

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

се зове *тренутна брзина* или, просто, *брзина* промене величине y у односу на x у тачки x_0. Погледајмо два примера.

Пример 12. Нека је са $q = q(t)$ означена количина наелектрисања која до временског тренутка t (од почетка мерења) прође кроз попречни пресек проводника, са Δt — неки временски интервал, и нека је $\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$ количина наелектрисања која прође кроз дати пресек проводника од тренутка t до тренутка $t + \Delta t$. Тада је вредност $I_{\text{ср}} = \Delta q/\Delta t$ средња јачина струје у посматраном временском интервалу, а гранична вредност

$$I = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

(тренутна) јачина струје у тренутку t.

Ако током времена Δt сматрамо да је јачина струје константна и једнака тренутној у тренутку t, онда током овог временског интервала кроз дати пресек проводника протекне $\Delta q = I\Delta t$ наелектрисања. Однос стварне количине наелектрисања која је прошла кроз дати пресек проводника и овако израчунате се задаје релацијом $\Delta q - dq = o(\Delta t)$. $\square$

Пример 13. Топлотни капацитет C тела је бројно једнак количини топлоте коју треба да прими тело да би му се температура променила за 1 K. Дакле $C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$, где је $Q(T)$ — количина топлоте коју поседује ово тело када је његова температура T, ΔT — нека задата промена температуре, а $\Delta Q = Q(T + \Delta T) - Q(T)$. Показује се да топлотни капацитет свих тела, мање или више, зависи од температуре. Тако да је релацијом $\dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$ уствари задат средњи топлотни капацитет у температурном опсегу $[T, T + \Delta T]$, а гранична вредност

$$\frac{dQ}{dT} = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

дефинише (тренутни) топлотни капацитет тела при температури T. $\square$