# Лекција 3

## ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

- ▶ Кошијев критеријум за постојање граничне вредности
- ▶ Основни лимеси
- ▶ Непрекидност с лева и с десна, прекиди прве и друге врсте
- ▶ Бесконачно мале и бесконачно велике функције
- ▶ Упоређивање функција
- ▶ Аритметика са малим $o$ и великим $O$

### 3.1. Кошијев критеријум за постојање граничне вредности

Значај следеће теореме је и у томе што она даје неопходан и довољан услов за постојање граничне вредности у тачки $x_0$, а да се при томе у њему не помиње сама гранична вредност, и да је он изражен у терминима вредности функције у некој шупљој околини тачке $x_0$.

**Теорема 1.** [Кошијев критеријум] *Нека је $E \subseteq X$ подскуп метричког простора $(X, d_X)$, $x_0$ тачка нагомилавања скупа $E$ и $f\colon E \to Y$ функција из $E$ у комплетан метрички простор $(Y, d_Y)$. Гранична вредност функције $f$ постоји у $x_0$ ако и само ако важи*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in E) \qquad x', x'' \in \dot{U}(x_0, \delta) \Rightarrow d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon. \tag{1}$$

*Доказ.* Нека постоји коначан лимес $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, тј. нека важи формула (2.3). Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Изаберимо за $\varepsilon/2$ из формуле (2.3) одговарајуће $\delta$. Покажимо да то $\delta$ задовољава и формулу (1). Наиме ако су $x', x'' \in E$ такви да је $x', x'' \in \dot{U}(x_0, \delta)$, тада из $d_X(x_0, x') < \delta$ и $d_X(x_0, x'') < \delta$ следи $d_Y(y_0, f(x')) < \varepsilon/2$ и $d_Y(y_0, f(x'')) < \varepsilon/2$, па је $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Обрнуто, нека важи услов из теореме, и узмимо произвољан $(x_0, f)$-низ $(x_n)$ и покажимо да низ $(f(x_n))$ конвергира, што је, како смо већ раније видели, довољно за постојање граничне вредности функције $f(x)$ у тачки $x_0$ (последица 2.1). Из дефиниције комплетности следи да је довољно показати да је $(f(x_n))$ Кошијев низ. Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$ и изаберимо $\delta$ тако да важи формула (1). Али онда из $(x_n) \to x_0$ следи да постоји $n_0$ такво да за свако $n \geq n_0$ важи да је $x_n \in U(x_0, \delta)$. Одавде сада добијамо да за свако $n', n'' \geq n_0$ важи $d_Y(f(x_{n'}), f(x_{n''})) < \varepsilon$, па је $(f(x_n))$ Кошијев низ. □

За реалне функције реалне променљиве теорема 1 очигледно важи. У случају реалне функције реалне променљиве услов из претходне теореме се може написати у следећем облику:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', x'' \in E)\ 0 < |x' - x_0| < \delta \wedge \\ \wedge\, 0 < |x'' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \tag{2}$$

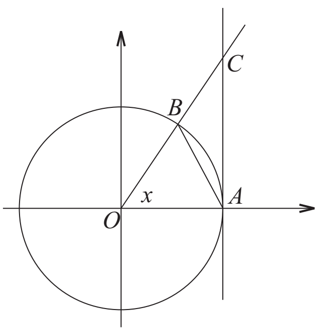
Приметимо да у случају реалне функције реалне променљиве тачку $x_0$ можемо заменити и једним од симбола $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, $-\infty$, $+\infty$, $\infty$.

## 3.2. Основни лимеси

У овом поглављу наведени су лимеси које се често зову таблични (то можемо схватити као основни), јер се израчунавања многих других лимеса своде на њих.

**Теорема 2.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1\,.$

*Доказ.* На слици је дат тригонометријски круг. Угао $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, дат у радијанима, је одређен $x$-осом и полуправом $OC$, права $AC$ је тангента на овај круг у тачки $A$, пресечној тачки тригонометријског круга и $x$-осе; тачка $B$ је пресек полуправе $OC$ и круга. Са слике није тешко приметити да је површина $P_{\triangle AOB} = \sin x/2$ троугла $AOB$, мања од површине $P_{AOB} = x/2$ кружног исечка $AOB$, а површина овог кружног исечка је мања од површине $P_{\triangle AOC} = \operatorname{tg} x/2$ троугла $AOC$. Дакле,




$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}, \quad \text{тј.} \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

После дељења сваког члана ове две неједнакости са позитивном величином $\sin x$ добијамо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Ако узмемо сада реципрочне вредности имамо

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Пошто су функције $\cos x$ и $\sin x/x$ парне, то последње две неједнакости важе и када $x \in (-\pi/2, 0)$. Функција $\cos x$ је непрекидна у 0, па је $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, а како је и $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, то из тачке $5^\circ$ теореме 2.9 следи да је и $\lim_{x\to 0} (\sin x/x) = 1$. $\square$

**Последица 1.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ .

*Доказ.* Тврђење следи из

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1. \square$$

**Последица 2.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$ .

*Доказ.* Функција $y = \sin x$ је строго растућа и непрекидна на интервалу $[-\pi/2, +\pi/2]$, па је и њој инверзна функција $y = \arcsin x$ строго растућа и непрекидна на интервалу $[-1, 1]$. Дакле имамо да је $\lim_{x\to 0} \arcsin x = 0$ и $\arcsin x \neq 0$ за свако $x$ из неке шупље околине тачке 0. Из теореме 2 следи да је $\lim_{y\to 0} \dfrac{y}{\sin y} = 1$. Сада применом последице 2.5 добијамо да је

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1. \square$$

**Последица 3.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ .

*Доказ.* Функција $y = \operatorname{tg} x$ је строго растућа и непрекидна на интервалу $(-\pi/2, +\pi/2)$, па је и њој инверзна функција $y = \operatorname{arctg} x$

строго растућа и непрекидна на интервалу $(-\infty, +\infty)$. Дакле, имамо да је $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg} x = 0$ и $\operatorname{arctg} x \neq 0$ за свако $x$ из неке шупље околине тачке 0. Из последице 1 имамо да је $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{\operatorname{tg} y} = 1$. Сада применом последице 2.5 добијамо да је

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1. \square$$

**Теорема 3.** $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e\,.$

*Доказ.* Видели смо (пример 6.16) да је $\lim \left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ за сваки низ $(x_n)$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Дакле имамо да је

$$\lim_{y\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e\,.$$

Како је $\lim\limits_{x\to +0} 1/x = +\infty$, то из последице 2.5 добијамо

$$\lim_{x\to +0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to +0} \left(1 + \frac{1}{(1/x)}\right)^{1/x} = \lim_{y\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e\,. \tag{3}$$

Приметимо да важи $\lim\limits_{x\to -0} \left(-\dfrac{1+x}{x}\right) = +\infty$ и

$$\lim_{y\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e\,.$$

Тада из последице 2.5 следи да је

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to -0} \left(1 + \frac{1}{-\frac{1+x}{x}}\right)^{-\frac{1+x}{x}+1} &= \\ = \lim_{y\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1} &= e\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Тврђење, сада, добијамо применом теореме 2.8 из (3) и (4) . $\square$

**Последица 4.** *Важи*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\qquad (a>0, a\neq 1),$$

*и, специјално, ако је* $a=e$ *важи* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\,.$

*Доказ.* Експоненцијална функција $y=a^x$, као што смо видели, је непрекидна и монотона, па је и њој инверзна функција $y=\log_a x$ таква, и ова инверзна функција је, рецимо, непрекидна између осталог и у тачки $e$. Сада из теореме 2.5 следи

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=$$
$$=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}\,.\square$$

**Последица 5.** *Важи*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\qquad (a>0, a\neq 1),$$

*и, специјално, ако је* $a=e$ *важи* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1\,.$

*Доказ.* Функција $y=a^x-1$ је строго монотона и непрекидна, па је $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)=0$ и $a^x-1=0$ само за $x=0$. Из последице 4 имамо да је

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{[\,\ln(1+y)/\ln a\,]}=\ln a,$$

Сада из последице 2.5 добијамо

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{[\,\ln(1+(a^x-1))/\ln a\,]}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{[\,\ln(1+y)/\ln a\,]}=\ln a.\square$$

**Пример 1.** Тако, рецимо, имамо (користимо такође теорему 2.11)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{2}}{\dfrac{a^x+b^x}{2}}\right)^{1/x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^{x^2}+b^{x^2}-2}\cdot\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-2}{2}\cdot\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}\cdot\frac{a^x+b^x-2}{2}\cdot\frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{\operatorname{Exp}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}-2}{2x}\right)}{\operatorname{Exp}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x-2}{2x}\right)} = \frac{\operatorname{Exp}\left[\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}-1}{x^2}+\dfrac{b^{x^2}-1}{x^2}\right)\cdot x\right]}{\operatorname{Exp}\left[\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}+\dfrac{b^x-1}{x}\right)\right]} =$$

$$= \frac{\operatorname{Exp}(0)}{\operatorname{Exp}\left[(\ln a+\ln b)/2\right]} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,;$$

овде је са $\operatorname{Exp}(x)$ означена функција $e^x$. $\square$

**Последица 6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$, *за свако* $\alpha\in\mathbf{R}$.

*Доказ.* За $\alpha=0$ тврђење очигледно важи. Стога претпоставимо да је $\alpha\neq 0$. Функција $y=(1+x)^\alpha-1$, $x\in(-1,+\infty)$, је непрекидна и строго монотона (за свако $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$, $x_1<x_2$, ако је $\alpha>0$, онда је $(1+x_1)^\alpha<(1+x_2)^\alpha$, а ако је $\alpha<0$, онда је $(1+x_1)^\alpha>(1+x_2)^\alpha$), па је $\lim\limits_{x\to 0}[(1+x)^\alpha-1]=0$ и $(1+x)^\alpha-1\neq 0$ за свако $x$ из неке шупље околине тачке 0. А пошто је и $\lim\limits_{y\to 0}(y/\ln(1+y))=1$, то из последице 2.5 следи да је

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\ln(1+(1+x)^\alpha-1)} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1,$$

па је

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right] = \alpha.\,\square$$

Користећи теорему 2.1, основне лимесе и основна правила за рачунање лимеса могу се наћи лакше и граничне вредности неких низова.

**Пример 2.** Нађимо граничну вредност низа $x_n = \sqrt[n]{(2^n+3^n)/4^n}$. Имамо

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n}} &= \lim_{n\to\infty}\left[(3/4)\,(1+(2/3)^n)^{1/n}\right] = \\ &= \frac{3}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(3/2)^n}\right)^{(3/2)^n\,(2/3)^n\,(1/n)} = \\ &= \frac{3}{4}\,e^{\lim\limits_{n\to\infty}[(2/3)^n\,(1/n)]} = \frac{3}{4}\,e^0 = \frac{3}{4}.\,\square\end{aligned}$$

**Пример 3.** Треба наћи $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$, где је $a>0$. Имамо

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[n^2\cdot\sqrt[n+1]{a}\cdot(a^{1/[n(n+1)]}-1)\right] = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{a}\cdot\frac{a^{1/[n(n+1)]}-1}{1/[n(n+1)]}\cdot\frac{n^2}{n(n+1)}\right) = \ln a,\end{aligned}$$

јер је $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n(n+1)}=1$, а из $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ (последица 5) и $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)\to 0$ следи (теорема 2.1) да је $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{1/[n(n+1)]}-1}{1/[n(n+1)]}=\ln a\,.\,\square$

**Пример 4.** Покажимо да ако је $a>1$, онда је $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x}=+\infty$. Приметимо (пример 6.15) да је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{n}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n+1}=+\infty. \tag{5}$$

Да би смо показали тврђење треба показати да је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}}{x_n}=+\infty, \tag{6}$$

за произвољан низ $(x_n)$, који у ширем смислу конвергира ка $+\infty$. Како $(x_n)\to+\infty$, то можемо претпоставити да је $x_n\geq 1$ за свако природно $n$. Из $[x]\leq x<[x]+1$ за свако реално $x$, следи да је

$$\frac{a^{[x_n]}}{[x_n]+1}<\frac{a^{x_n}}{x_n}<\frac{a^{[x_n]+1}}{[x_n]}. \tag{7}$$

Приметимо да из $(x_n) \to +\infty$ имамо да $([x_n]) \to +\infty$, па из теореме 6.17 и (5) следи да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{[x_n]}}{[x_n]+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{[x_n]+1}}{[x_n]} = +\infty$$

Сада из теореме 6.16 и (7) следи (6). $\square$

**Пример 5.** Из претходног примера следи да је $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{e^y}{y} = +\infty$, а одавде да је $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{y}{e^y} = +0$. Како је и $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ и, то из последице 2.5 имамо да је

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty,$$

односно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +0\,.$ $\square$

**Пример 6.** Покажимо да је $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = -0$. Како је $\lim\limits_{x\to+0} 1/x = +\infty$ и из претходног примера $\lim\limits_{y\to+\infty} \left(-\dfrac{\ln y}{y}\right) = -0$, то из последице 2.5 добијамо

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = \lim_{x\to+0} \left[-\frac{\ln(1/x)}{1/x}\right] = \lim_{y\to+\infty} \left(-\frac{\ln y}{y}\right) = -0\,. \square$$

**Пример 7.** Покажимо да ако је $a > 1$, онда је $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = +0$ за свако природно $n$. Није тешко видети да је

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\sqrt[n]{a}^x}\right)^n = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[n]{a}^x}\right)^n = +0,$$

јер је $\sqrt[n]{a} > 1$ (види пример 4).

Сада, рецимо, је

$$\lim_{x\to+0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{100}}{e^{2y}} = +0. \square$$

**Пример 8.** Израчунајмо лимес

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x)(e^{3x} - e^{5x})}{\ln(1-2x)(\sqrt{1+3x^2}-1)}.$$

Имамо да је

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\sin^2(3x/2)}{(3x/2)^2}\cdot\dfrac{9}{4}x^2\cdot(-e^{3x})\cdot\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot 2x}{\dfrac{\ln(1-2x)}{-2x}\cdot(-2x)\cdot\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{3x^2}\cdot 3x^2}=\frac{2\cdot 1^2\cdot\dfrac{9}{4}\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2}{(-2)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3}=3.\ \square$$

## 3.3. Непрекидност с лева и с десна, прекиди прве и друге врсте

Нека је функција $f$ дефинисана на интервалу $(a,b)$ осим можда у тачки $x_0\in(a,b)$. Тачка $x_0$ је *тачка прекида* функције $f$ или ако $f$ није дефинисано у тачки $x_0$, или ако је она дефинисана у тој тачки, али није у њој непрекидна.

Ако је $x_0$ тачка прекида функције $f$ и постоје коначни лимеси

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)\quad\text{и}\quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x),$$

онда кажемо да у тачки $x_0$ функција $f$ има *прекид прве врсте*. Вредност $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ се зове *скок функције* $f$ у тачки $x_0$. Ако је скок функције $f$ у тачки $x_0$ једнак 0, тј. ако је $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, онда кажемо да у тачки $x_0$ имамо *отклоњив прекид*. Ако прекид није прве врсте, онда кажемо да је прекид *друге врсте*.

Кажемо да је функција *непрекидна с лева* [*с десна*], ако је $f(x_0-0)=f(x_0)$ $[f(x_0+0)=f(x_0)]$.

**Пример 9.** Функција $y=\operatorname{sgn}x$ у тачки $x=0$ има прекид прве врсте, јер је $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)=1$ и $f(-0)=\lim\limits_{x\to-0}f(x)=-1$. Овај прекид није отклоњив, јер је скок ове функције у 0 једнак 2.

Функција $y=1/x$ у тачки $x=0$ има прекид друге врсте, јер су лимеси $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$ бесконачни.

Функција $y=[x]$ — целобројна вредност од $x$, је непрекидна с десна у свакој целобројној тачки $i\in\mathbf{Z}$, јер је $f(i+0)=i=[i]$, а није с лева, јер је $f(i-0)=i-1\neq[i]$. $\square$

Функција $\alpha(x)$ је *бесконачно мала* [*бесконачно велика*], *када* $x \to a$, ако је

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0 \quad [\lim_{x\to a} \alpha(x) = \infty].$$

Значај бесконачно малих види се из следеће теореме.

**Теорема 4.** *Лимес* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *постоји и једнак је* $A$ *тада и само тада, када је* $f(x) = A + \alpha(x)$, *где је* $\alpha(x)$ *бесконачно мала, када* $x \to a$.

*Доказ.* Нека је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Узмимо функцију $\alpha(x) = f(x) - A$. Функција $\alpha(x)$ је бесконачно мала, јер важи

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a} (f(x) - A) = \lim_{x\to a} f(x) - A = 0.$$

Нека је сада $f(x) = A + \alpha(x)$, где је $\alpha(x)$ бесконачно мала, када $x \to a$. Тада је

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x\to a} \alpha(x) = A + 0 = A. \square$$

Није тешко проверити да за бесконачно мале функције важи следећа теорема.

**Теорема 5.** *Сума и производ коначног броја бесконачних малих, када* $x \to a$, *је бесконачно мала, када* $x \to a$. *Производ бесконачно мале функције, када* $x \to a$, *са ограниченом функцијом у некој шупљој околини тачке* $a$ *је бесконачна мала, када* $x \to a$.

Дакле, производ и сума бесконачно малих функција, када $x \to a$, је бесконачна мала функција, када $x \to a$. А шта је са количником таквих функција? Из следећег примера се види да одговор није једнозначан.

**Пример 10.** Функције $\alpha(x) = x$ и $\beta(x) = x^2$ су бесконачно мале, када $x \to 0$, али је

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty\,.$$

Такође функције $\alpha(x) = x$ и $\beta(x) = 2x$ су бесконачно мале, када $x \to 0$, али је $\lim\limits_{x\to 0} \beta(x)/\alpha(x) = 2$.

Напокон, узмемо бесконачно мале $\alpha(x) = x$ и $\beta(x) = x\sin(1/x)$, када $x \to 0$. Тада лимес $\lim\limits_{x\to 0} \beta(x)/\alpha(x)$ уопште не постоји. □

Из теореме 6.6 следи да важи и следеће тврђење.

**Теорема 6.** *Функција $\alpha(x)$ је бесконачно мала, када $x \to a$, акко је функција $|\alpha(x)|$ бесконачно мала, када $x \to a$.*

## 3.5. Упоређивање функција

Нека су $f$ и $g$ две реалне функције реалне променљиве. Кажемо да је функција $f$ *ограничена у односу на* функцију $g$ *у околини тачке* $x_0$, и пишемо
$$f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0$$
(ово читамо као: $f(x)$ је велико $O$ од $g(x)$, када $x$ тежи ка $x_0$), ако постоји $\varepsilon > 0$ такво да су функције $f(x)$ и $g(x)$ дефинисане у шупљој околини $\dot{U}(x_0, \varepsilon)$ и постоји реална константа $C$ тако да за свако $x \in \dot{U}(x_0, \varepsilon)$ важи $|f(x)| \le C|g(x)|$.

**Теорема 7.** *Важи да је $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, акко постоји шупља околина $\dot{U}(x_0)$ тачке $x_0$ и функција $\varphi(x)$ ограничена на њој тако да је $f(x) = \varphi(x)g(x)$ за свако $x \in \dot{U}(x_0)$.*

*Доказ.* Покажимо нетривијални део теореме. Нека је $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$. Тада из дефиниције следи да су функције $f(x)$ и $g(x)$ дефинисане у некој шупљој околини $\dot{U}(x_0, \varepsilon)$, и постоји реална константа $C$ тако да за свако $x \in \dot{U}(x_0, \varepsilon)$ важи $|f(x)| \le C|g(x)|$. Одавде следи да ако је $g(x) = 0$ за неко $x \in \dot{U}(x_0, \varepsilon)$, онда је и $f(x) = 0$. Нека је
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)/g(x), & \text{ако је} \quad g(x) \neq 0, \\ 0, & \text{ако је} \quad g(x) = 0. \end{cases}$$
Очигледно да важи у шупљој околини $\dot{U}(x_0, \varepsilon)$ да је $f(x) = \varphi(x)g(x)$, а такође да је у њој функција $\varphi(x)$ ограничена, јер је $|\varphi(x)| \le C$. □

**Теорема 8.** *Ако је $f(x) = \varphi(x)g(x)$ за свако $x$ из неке шупље околине $\dot{U}(x_0, \varepsilon)$ тачке $x_0$ и постоји коначан лимес $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, онда је $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.*

*Доказ.* Из теореме 2.9 следи да је функција $\varphi(x)$ ограничена у некој шупљој околини $\dot{U}(x_0, \varepsilon')$, тј. постоји позитиван реалан број $C$ такав да је $|\varphi(x)| \leq C$ за свако $x \in \dot{U}(x_0, \varepsilon')$. Али сада за свако $x \in \dot{U}(x_0, \varepsilon'')$, где је $\varepsilon'' = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\}$, важи да је

$$|f(x)| = |\varphi(x)||g(x)| \leq C|g(x)|\,. \square$$

**Пример 11.** Није тешко видети да је, рецимо, $1/x = O(1/x^2)$, $x \to 0$. Такође, $\sin(3x)/x = O(1)$, $x \to 0$, што у суштини значи да је функција $y = \sin(3x)/x$ ограничена у околини тачке $0$. $\square$

Функције $f(x)$ и $g(x)$ се зову *функције истог реда, када* $x \to x_0$, и пишемо $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$, ако је $f = O(g)$, $x \to x_0$, и $g = O(f)$, $x \to x_0$.

**Пример 12.** Рецимо, није тешко видети да су $\alpha(x) = x$ и $\beta(x) = x(2 + \sin(1/x))$ функције истог реда, када $x \to 0$. $\square$

**Теорема 9.** *Ако је лимес* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ *коначан и различит од* $0$*, онда је* $f(x) \asymp g(x)$*,* $x \to x_0$*.*

*Доказ.* Из услова теореме је $1/k$ реалан број различит од 0. Како је $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ онда постоји шупља околина $\dot{U}(x_0)$ тачке $x_0$ таква да је $f(x) \neq 0$ за свако $x \in \dot{U}(x_0)$, па има смисла и количник $g(x)/f(x)$ за свако $x \in \dot{U}(x_0)$. По правилу лимеса од количника одмах добијамо да је $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1/k \neq 0$

Ако сада узмемо да је $\varphi(x) = f(x)/g(x)$, онда је $f(x) = \varphi(x)g(x)$ за свако $x \in \dot{U}(x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ је коначан, па из теореме 8 добијамо да је $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$.

Ако узмемо да је $\psi(x) = g(x)/f(x)$, онда је $g(x) = \psi(x)f(x)$ за свако $x \in \dot{U}(x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$ је коначан, па опет из теореме 8 следи да је $g(x) = O(f(x))$, $x \to x_0$. $\square$

**Пример 13.** Функције $f(x) = 3x^2$ и $g(x) = \sin x^2$ су функције истог реда, када $x \to 0$, јер је $\lim\limits_{x \to 0}(f(x)/g(x)) = 3\,.$ $\square$

**Пример 14.** Услов постојања коначног лимеса у последњој теореми није неопходан да би функције биле истог реда. Рецимо ако су функције

$f(x)$ и $g(x)$ дефинисане на следећи начин:

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{ако је } x = 1/n \text{ за неко } n \in \mathbf{N}, \\ x, & \text{у противном,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x = 1/n \text{ за неко } n \in \mathbf{N}, \\ x, & \text{у противном.} \end{cases}$$

Приметимо да $\lim\limits_{x \to 0} (f(x)/g(x))$ не постоји, али су функције $f(x)$ и $g(x)$ истог реда, када $x \to 0$. $\square$

Кажемо да су функције $f(x)$ и $g(x)$ *еквивалентне* или *асимптотски једнаке*, када $x \to x_0$, и пишемо '$f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$', ако постоји шупља околина $\dot{U}(x_0)$ тачке $x_0$ и функција $\varphi(x)$ тако да су функције $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ дефинисане на $\dot{U}(x_0)$ и да за њих важе услови

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1 \quad \text{и} \quad f(x) = \varphi(x) g(x) \quad \text{за свако} \quad x \in \dot{U}(x_0).$$

**Пример 15.** Покажимо да је $\dfrac{x^6}{1+x^4} \sim x^2$, $x \to \infty$. Наиме, ако узмемо $\varphi(x) = \dfrac{x^4}{1+x^4}$, онда је $\dfrac{x^6}{1+x^4} = \varphi(x) x^2$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4}{1+x^4} = 1$. $\square$

Приметимо да из $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$ следи да је у некој шупљој околини тачке $x_0$ задовољено да је $\varphi(x) \neq 0$, па за функцију $\psi(x) = 1/\varphi(x)$ у тој околини важи

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1 \quad \text{и} \quad g(x) = \psi(x) f(x),$$

тј. добијамо да је

$$g(x) \sim f(x), \ x \to x_0.$$

Дакле релација еквивалентности функција је симетрична. Она је, очигледно, и рефлексивна. Покажимо да је ова релација и транзитивна, што ће и оправдавати њено име. Претпоставимо да је

$$f(x) \sim g(x), \ x \to x_0, \quad \text{и} \quad g(x) \sim h(x), \ x \to x_0,$$

тј. постоје функције $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ такве да је

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = 1,$$

и за свако $x$ из неке шупље околине тачке $x_0$ важи

$$f(x) = \varphi(x)g(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \psi(x)h(x).$$

Ако сада узмемо $\theta(x) = \varphi(x)\psi(x)$, онда у изабраној шупљој околини тачке $x_0$ имамо да је

$$f(x) = \varphi(x)g(x) = \varphi(x)\psi(x)h(x) = \theta(x)h(x),$$

а, такође, и да је

$$\lim_{x\to x_0} \theta(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x)\psi(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) \lim_{x\to x_0} \psi(x) = 1.$$

Дакле заиста је $f(x) \sim h(x)$, $x \to x_0$.

Такође приметимо да ако је $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ у некој шупљој околини тачке $x_0$, онда је услов еквивалентности функција $f(x)$ и $g(x)$ еквивалентан услову

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \text{или услову} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Наиме из еквивалентности функција овај услов одмах следи, а из овог услова следи еквивалентност функција, ако у дефиницији узмемо да је $\varphi(x) = f(x)/g(x)$.

**Пример 16.** Из претходне примедбе и из таблице основних лимеса следи да су следеће бесконачно мале функције када $x \to 0$ еквивалентне:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1\,. \square$$

**Теорема 10.** *Ако је $u(x)$ таква да је $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$, онда је*

$$\begin{aligned} u(x) \sim \sin u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim \\ \sim \ln(1+u(x)) \sim e^{u(x)} - 1, \quad \textit{када} \quad x \to x_0. \end{aligned}$$

*Доказ.* Покажимо да је $u(x) \sim \sin u(x)$, када $x \to x_0$. Уочимо функцију

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ако је } x \neq 0, \\ 1, & \text{ако је } x = 0. \end{cases}$$

Ова функција је непрекидна у 0. Нека је $\varphi = \tilde{\varphi} \circ u$. Како је $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$, то из теореме 2.5 следи да је

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{\varphi}(u(x)) = \tilde{\varphi}(\lim_{x \to x_0} u(x)) = 1.$$

Такође није тешко приметити да је $\sin(u(x)) = \varphi(x)u(x)$ за свако $x$ из неке шупље околине тачке $x_0$ (ако је $u(x) = 0$, онда се ова једнакост своди на $0 = \sin 0 = \varphi(x) \cdot 0 = 1 \cdot 0$). $\square$

Приметимо да услови претходне теореме нису довољни за примену последице 2.5.

Ако су функције $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ такве да је у некој шупљој околини тачке $x_0$ задовољено $\alpha(x) = \varepsilon(x)\beta(x)$, где је $\varepsilon(x)$ бесконачно мала функција, када $x \to x_0$, тј. важи $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, онда кажемо да је функција $\alpha(x)$ *бесконачно мала у односу на функцију* $\beta(x)$, *када* $x \to x_0$, и пишемо $\alpha = o(\beta)$, $x \to x_0$ (ово се чита као '$\alpha$ је мало $o$ од $\beta$, када $x$ тежи ка $x_0$').

Из дефиниције следи да запис '$\alpha(x) = o(1)$, $x \to x_0$' значи једноставно да је функција $\alpha(x)$ бесконачно мала, када $x \to x_0$.

Ако је $\beta(x) \neq 0$ у некој шупљој околини тачке $x_0$, онда је услов да је $\alpha(x) = \varepsilon(x)\beta(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ еквивалентан услову

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

тј. под функцијом $o(\beta)$, $x \to x_0$, подразумевамо произвољну функцију која задовољава услов

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(\beta)}{\beta} = 0.$$

Ако је $\beta$ бесконачно мала функција, када $x \to x_0$, онда за функцију $\alpha = o(\beta)$, $x \to x_0$, кажемо да је *бесконачно мала вишег реда од бесконачно мале* $\beta$.

**Напомена.** Када користимо симболе $o$ и $O$ треба обратити пажњу да одговарајуће једнакости нису једнакости у обичном смислу. Рецимо, из једнакости

$$\alpha_1 = o(\beta),\ x \to x_0, \quad \text{и} \quad \alpha_2 = o(\beta),\ x \to x_0,$$

не следи једнакост $\alpha_1 = \alpha_2$, а из једнакости

$$f + O(g) = g + O(f),\ x \to x_0,$$

не следи једнакост $f = g$. Опште правило при употреби ових симбола је да ове једнакости важе, ако се читају слева на десно, а обрнуто могу да не важе. □

Сада можемо закључити следеће. Нека у некој шупљој околини $\dot{U}(x_0)$ тачке $x_0$ важи да је $f(x) = \varphi(x)g(x)$. Тада ако је:

1) функција $\varphi(x)$ ограничена на $\dot{U}(x_0)$, онда је $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 1$, онда је $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, онда је $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$.

## 3.6. Аритметика са малим $o$ и великим $O$

Наведимо неколико тврђења која још више бацају светлости на специфичност рачунања са малим $o$ и великим $O$.

**Теорема 11.** *Ако су $\alpha$ и $\beta$ функције дефинисане у некој шупљој околини тачке $x_0$, онда, када $x \to x_0$, важи:* 1) $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$; 2) $o(\alpha+\beta) = o(\alpha) + o(\beta)$; 3) $o(\alpha)o(\beta) = o(\alpha\beta)$; 4) $o(\alpha\beta) = o(\alpha)o(\beta)$; 5) $\beta o(\alpha) = o(\beta\alpha)$; 6) *ако је $\beta$ ограничена функција у некој шупљој околини тачке $x_0$, онда је* $o(\alpha\beta) = o(\alpha)$; 7) $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$.

*Доказ.* Покажимо да важи 4). Нека је $\gamma = o(\alpha\beta)$, $x \to x_0$. Тада је $\gamma = \varepsilon\alpha\beta$ у некој шупљој околини тачке $x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. За функције $\gamma_1 = \operatorname{sgn}(\varepsilon)\sqrt{|\varepsilon|}\,\alpha$ и $\gamma_2 = \sqrt{|\varepsilon|}\,\beta$, очигледно важи да је $\gamma = \gamma_1\gamma_2$, $\gamma_1 = o(\alpha)$ и $\gamma_2 = o(\beta)$.

Покажимо тврђење 6). Ако је $\gamma = o(\alpha\beta)$, $x \to x_0$, онда је $\gamma = \varepsilon\alpha\beta$ у некој шупљој околини тачке $x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Али, онда је $\gamma = (\varepsilon\beta)\alpha$ и $\lim\limits_{x\to x_0} [\varepsilon(x)\,\beta(x)] = 0$ (теорема 5), па је $\gamma = o(\alpha)$, $x \to x_0$.

Покажимо 7). Ако је $\beta = o(o(\alpha))$, онда је $\beta = \varepsilon_1\beta'$, где је $\beta' = \varepsilon_2\alpha$; овде су $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon_1 = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon_2 = 0$. Добијамо да је $\beta = \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$, па је заиста $\beta = o(\alpha)$, односно $o(o(\alpha)) = o(\alpha)$. □

**Теорема 12.** *Ако су $\alpha$ и $\beta$ функције дефинисане у некој шупљој околини тачке $x_0$, онда, када $x \to x_0$, важи:* 1) $O(\alpha)+O(\alpha)=O(\alpha)$; 2) $O(\alpha)O(\beta) = O(\alpha\beta)$; 3) $\beta O(\alpha) = O(\beta\alpha)$; 4) *ако је $\beta$ ограничена функција у некој шупљој околини тачке $x_0$, онда је* $O(\alpha\beta) = O(\alpha)$; 5) $O(O(\alpha)) = O(\alpha)$.

*Доказ.* Докажимо, рецимо, тврђење 5). Нека је $\beta = O(O(\alpha))$. Тада за свако $x$ из неке шупље околине тачке $x_0$ важи да је $|\beta(x)| \le C'|\alpha'(x)|$ и $|\alpha'(x)| \le C''|\alpha(x)|$ за неке реалне позитивне константе $C'$ и $C''$, па је $|\beta(x)| \le C'C''|\alpha(x)|$. Дакле заиста је $\beta = O(\alpha)$. $\square$

**Теорема 13.** *Ако је $\alpha$ функција дефинисана у некој шупљој околини тачке $x_0$, онда, када $x \to x_0$, важи:* 1) $o(\alpha) = O(\alpha)$; 2) $O(\alpha) + o(\alpha) = O(\alpha)$; 3) $o(\alpha)\cdot O(\beta) = o(\alpha\beta)$; 4) $o(O(\alpha)) = o(\alpha)$; 5) $O(o(\alpha)) = o(\alpha)$.

*Доказ.* Тврђење 1) следи из дефиниције 'малог о' и теореме 7. Докажимо тврђење 3). Треба показати да из $\gamma_1 = o(\alpha)$, $x \to x_0$, и $\gamma_2 = O(\beta)$, $x \to x_0$, следи $\gamma_1\gamma_2 = o(\alpha\beta)$, $x \to x_0$. Како је $\gamma_1 = o(\alpha)$, $x \to x_0$, то је $\gamma_1(x) = \varphi(x)\alpha(x)$ за свако $x$ из неке шупље околине $\dot{U}(x_0,\varepsilon_1)$ тачке $x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$, а како је $\gamma_2 = O(\beta)$, $x \to x_0$, то за неки позитиван реалан број $C$ важи да је $|\gamma_2(x)| \le C|\beta(x)|$ за свако $x$ из неке шупље околине $\dot{U}(x_0,\varepsilon_2)$ тачке $x_0$. Означимо са $\psi(x)$ функцију такву да је $\gamma_2(x) = \psi(x)\beta(x)$ и $|\psi(x)| \le C$ за свако $x \in \dot{U}(x_0,\varepsilon_2)$. Тада за свако $x \in \dot{U}(x_0,\varepsilon)$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, важи

$$\gamma_1(x)\gamma_2(x) = [\varphi(x)\alpha(x)][\psi(x)\beta(x)] = [\varphi(x)\psi(x)][\alpha(x)\beta(x)],$$

и $\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)\psi(x)] = 0$ (теорема 5), па је $\gamma_1\gamma_2 = o(\alpha\beta)$, $x \to x_0$.

Покажимо 5). Како је $\gamma = O(\beta)$, $x \to x_0$, где је $\beta(x) = \varphi(x)\alpha(x)$ за свако $x$ из неке шупље околине $\dot{U}(x_0,\varepsilon_1)$ тачке $x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$, то за неки позитиван реалан број $C$ важи да је $|\gamma(x)| \le C|\beta(x)|$ за свако $x$ из неке шупље околине $\dot{U}(x_0,\varepsilon_2)$ тачке $x_0$. Означимо са $\psi(x)$ функцију такву да је $\gamma(x) = \psi(x)\beta(x)$ и $|\psi(x)| \le C$ за свако $x \in \dot{U}(x_0,\varepsilon_2)$. Тада за свако $x \in \dot{U}(x_0,\varepsilon)$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$,

$$\gamma(x) = \psi(x)\beta(x) = [\psi(x)\varphi(x)]\alpha(x),$$

и $\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)\psi(x)] = 0$ (теорема 5), па је $\gamma = o(\alpha)$, $x \to x_0$. $\square$

**Последица 7.** *Нека је $\alpha$ функција дефинисана у некој шупљој околини тачке $x_0$. Тада за произвољне реалне константе $c_1$ и $c_2$ важи $c_1 O(\alpha) + c_2 o(\alpha) = O(\alpha)$, када $x \to x_0$.*

*Доказ.* Из 3) и 4) теореме 12 следи да је $c_1 O(\alpha) = O(\alpha)$, а из 5) и 6) теореме 11 да је $c_2 o(\alpha) = o(\alpha)$. Сада из 1) теореме 13 и 1) теореме 12 следи тврђење. $\Box$

**Последица 8.** *Ако је $\alpha$ бесконачно мала функција, када $x \to x_0$, то, када $x \to x_0$, важи:* 1) $o(\alpha^2) = o(\alpha)$; 2) $o(a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n) = o(\alpha)$, *где су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ произвољни реални бројеви*; 3) *Ако је $|\beta| \leq o(\alpha)$, онда је $\beta = o(\alpha)$.*

*Доказ.* Како је $\alpha$ бесконачно мала, када $x \to x_0$, то је она и ограничена у некој шупљој околини тачке $x_0$. Тврђење 1) сада следи из 6) теореме 11.

Имамо да је

$$o(a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n) = o(a_1\alpha) + o(\alpha(a_2\alpha + \cdots + a_n\alpha^{n-1})).$$

Како је $a_2\alpha + \cdots + a_n\alpha^{n-1}$ ограничена функција у некој шупљој околини тачке $x_0$, то је $o(\alpha(a_2\alpha + \cdots + a_n\alpha^{n-1})) = o(\alpha)$. Такође је $o(a_1\alpha) = o(\alpha)$, па тврђење 2) следи из 1) теореме 11.

Тврђење 3) следи из 5) теореме 13. $\Box$

**Теорема 14.** *Нека је $\lim\limits_{t\to b} f(t) = a$, и у некој шупљој околини тачке $b$ важи $f(t) \neq a$. Тада, ако је $\varphi(x) = o(\psi(x))$, када $x \to a$, онда је $\varphi(f(t)) = o[\psi(f(t))]$, када $t \to b$; а ако је $\varphi(x) = O(\psi(x))$, када $x \to a$, онда је $\varphi(f(t)) = O[\psi(f(t))]$, када $t \to b$.*

*Доказ.* Докажимо први део теореме. Како је $\varphi(x) = o(\psi(x))$, то постоји функција $\varepsilon(x)$ таква да је у некој шупљој околини $\dot{U}(a)$ тачке $a$ задовољено $\varphi(x) = \varepsilon(x)\psi(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Како је $\lim\limits_{t\to b} f(t) = a$ и како постоји шупља околина тачке $b$ где је увек $f(t) \neq a$, то постоји шупља околина тачке $b$ тако да је $f(t) \in \dot{U}(a)$, па је $\varphi(f(t)) = \varepsilon(f(t))\psi(f(t))$. Али применом последице 2.5 добијамо

$$\lim_{t\to b} \varepsilon(f(t)) = \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0,$$

па је заиста $\varphi(f(t)) = o(\psi(f(t)))$, када $t \to b$. $\Box$