Лекција 2

ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

▶ Гранична вредност функције
▶ Уопштени лимес функције. Једнострани лимеси
▶ Основна својства лимеса
▶ Гранична вредност и монотоне функције

2.1. Гранична вредност функције

У овом поглављу свуда, ако то није другачије речено, претпостављамо да су X и Y метрички простори, чије метрике су редом d_X и d_Y. Ако посматрамо неки подскуп датог метричког простора, подразумеваћемо да је на њему дефинисана и одговарајућа метрика која га чини подпростором уоченог метричког простора.

Нека је $f\colon E \to Y$ функција скупа $E \subseteq X$ у простор Y, и нека је x_0 тачка нагомилавања скупа E. Кажемо да је тачка $y_0 \in Y$ *гранична вредност* функције f у тачки x_0, и пишемо $\lim\limits_{x_0} f = y_0$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, ако је функција $f^*\colon E \cup \{x_0\} \to Y$, где је

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ y_0, & x = x_0, \end{cases}$$

непрекидна у тачки x_0. Другим речима, гранична вредност функције f у тачки x_0 је тачка $y_0 \in Y$ ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(\dot{U}(x_0, \delta) \cap E) \subseteq U(y_0, \varepsilon). \tag{1}$$

Овој формули је еквивалентна формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)\ 0 < d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(y_0, f(x)) < \varepsilon. \tag{2}$$

Последња формула се у случају када је f реална функција реалне променљиве, тј. када је $E \subseteq \mathbf{R}$ и $Y = \mathbf{R}$, може написати у облику

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon. \tag{3}$$

Приметимо, да појам граничне вредности не би имао нарочитог смисла када тачка x_0 не би била тачка нагомилавања домена E функције f, јер би смо тада као граничну вредност могли узети произвољно $y_0 \in Y$.

Друго, у принципу имамо два случаја: или $x_0 \in E$ или $x_0 \notin E$. У првом случају вредност y_0 представља вредност коју би функција у тачки x_0 требало да има да би била у њој непрекидна. Ово нас посебно интересује, јер за нас непрекидност је "лепо" својство и било би пожељно да га функција има. Дакле, у овом случају вредност y_0 показује како би требало "исправити" функцију у тачки x_0 да би она у тој тачки била непрекидна (не искључујемо случај када функција већ узима у тачки x_0 вредност y_0, и самим тим је не треба уопште "исправљати", јер је већ непрекидна у посматраној тачки). У другом случају ми проширујемо домен функције и на тачку која је "близу" домена, али то чинимо опет на начин да функција у тој тачки поседује за нас "веома пожељно" својство — својство непрекидности.

Нека је $f\colon E \to Y$ функција скупа $E \subseteq X$ у простор Y. Низ (x_n) у X је (x_0, f)-*низ*, ако је x_0 тачка нагомилавања домена функције f, тј. $x_0 \in E'$, $(x_n) \to x_0$ и за свако природно n важи да је $x_n \neq x_0$ и $x_n \in E$.

Ако искористимо сада еквивалентност дефиниције непрекидности и дефиниције непрекидности по Хајнеу, онда одмах добијамо да је следеће тврђење тачно.

Теорема 1. *Нека је $f\colon E \to Y$ функција скупа $E \subseteq X$ у простор Y и $x_0 \in E'$. Гранична вредност функције f у тачки x_0 је тачка $y_0 \in Y$ акко $(f(x_n)) \to y_0$ за сваки (x_0, f)-низ (x_n).*

Приметимо да скуп свих (x_0, f)-низова у претходној теореми није празан, и да би у противном гранична вредност функције f, сагласно тврђењу ове теореме, могла бити произвољно $y_0 \in Y$.

Услов из претходне теореме, у случају реалних функција реалне променљиве, можемо мало "ослабити", тако што се не морају узети у обзир сви (x_0, f)-низови.

Теорема 2. *Нека је $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subseteq \mathbf{R}$, реална функција реалне променљиве и $a \in E'$. Гранична вредност функције f у тачки a је број A акко $(f(x_n)) \to A$ за сваки строго монотони (a, f)-низ (x_n).*

Доказ. Из претходне теореме следи да, ако је гранична вредност функције f у тачки a број A, онда $(f(x_n)) \to A$ за сваки строго монотони (a, f)-низ (x_n).

Покажимо да важи и обрнуто, тј. претпоставимо да је $(f(x_n)) \to A$ за сваки строго монотони (a, f)-низ (x_n), и претпоставимо да тачка A није гранична вредност функције f у тачки a. Тада из теореме 1 следи да постоји (a,f)-низ (y_n) за који не важи да $(f(y_n)) \to A$. Претпоставимо, прво, да низ $(f(y_n))$ конвергира у $\overline{\mathbf{R}}$ ка тачки A', $A' \neq A$. Из леме 6.1 следи да низ (y_n) има монотони подниз (y'_n), и он као подниз, такође, конвергира ка a. Како је сваки члан овог подниза различит од a, то из њега увек можемо издвојити подниз (y''_n) који је строго монотон, и он такође конвергира ка a. Подниз (y''_n) је такође (a,f)-низ, а низ $(f(y''_n))$, који је подниз од $(f(y_n))$, конвергира ка A', што је немогуће.

Претпоставимо, сада, да низ $(f(y_n))$ не конвергира у $\overline{\mathbf{R}}$. Из последице 6.5 тада следи да овај низ има барем две тачке нагомилавања, а једна од њих, A', је различита од A. Уочимо подниз $(f(y'_n))$ низа $(f(y_n))$ који конвергира ка A'. Низ (y'_n) је, такође, један (a,f)-низ, и ми овај случај тако сводимо на претходни. $\square$

Услов теореме 1 се може дати и у облику у којем се не помиње сама гранична вредност y_0.

Последица 1. *Нека је $f\colon E \to Y$ функција скупа $E \subseteq X$ у простор Y и $x_0 \in E'$. Функција f има граничну вредност у тачки x_0 акко је низ $(f(x_n))$ конвергентан за сваки (x_0,f)-низ (x_n).*

Доказ. Довољно је да покажемо (види теорему 1) да из услова да низ $(f(x_n))$ конвергира за сваки (x_0,f)-низ (x_n) следи услов постојања граничне вредности функције f у тачки x_0, тј. да постоји тачка $y_0 \in Y$ таква да $(f(x_n)) \to y_0$ за сваки (x_0,f)-низ (x_n).

Дакле претпоставимо да имамо два (x_0,f)-низа (x_n) и (x'_n) таква да $(f(x_n)) \to y_0$ и $(f(x'_n)) \to y'_0$, где је $y_0 \neq y'_0$. Последње је немогуће, јер низ (x''_n), где је $x''_n = x_n$, ако је n непарно, и $x''_n = x'_n$, ако је n парно, је такође (x_0,f)-низ и притом низ $(f(x''_n))$ дивергира. $\square$

Приметимо да се теорема 2 не може на сличан начин "прерадити" као теорема 1. Наиме, функција $y = \operatorname{sgn} x$ нема у 0 граничну вредност, а сваки строго монотони $(0,\operatorname{sgn})$-низ (x_n) је такав да низ $(\operatorname{sgn} x_n)$ конвергира или ка 1, или ка -1.

Пример 1. Применимо теорему 1 и покажимо да функција $f(x) = \sin(1/x)$ нема граничну вредност у 0. Претпоставимо супротно, тј. нека је $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a$. Узмимо два низа (x_n) и (x'_n), где је

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{и} \quad x'_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}.$$

Приметимо да је $(x_n) \to 0$ и $(x'_n) \to 0$. Но из $(f(x_n)) \to 0$ следи да је $a = 0$, а из $(f(x'_n)) \to 1$ следи да је $a = 1$. Из добијене контрадикције следи да функција $f(x)$, заиста, нема граничну вредност у 0. □

Следећом теоремом се показује јединственост граничне вредности функције у некој тачки.

Теорема 3. *Ако је* $\lim\limits_{x_0} f = y_0$ *и* $\lim\limits_{x_0} f = y'_0$, *онда је* $y_0 = y'_0$.

Доказ. Узмимо произвољан (x_0, f)-низ (x_n). Тада из теореме 1 имамо $(f(x_n)) \to y_0$ и $(f(x_n)) \to y'_0$, а онда из теореме 6.2 следи да је $y_0 = y'_0$. □

Теорема 4. *Функција* $f : E \to Y$, $E \subseteq X$, *је непрекидна у тачки* $x_0 \in E' \cap E$ *ако и само ако је* $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$.

Доказ. Тврђење ове теореме директно следи из дефиниције граничне вредности и чињенице да су функције f^* и f идентички једнаке функције. □

Теорема 5. *Нека су* $f : E \to Y$, $E \subseteq X$, *и* $g : F \to Z$, $F \subseteq Y$, *две функције такве да је* $f(E) \subseteq F$, *и нека је* $x_0 \in E'$. *Ако је* $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $y_0 \in F$, *и функција* g *непрекидна у тачки* y_0, *тада је*

$$\lim_{x_0} g \circ f = g(\lim_{x_0} f) = g(y_0).$$

Доказ. Приметимо да је $(g \circ f)^*(x) = g \circ f^*(x)$ за свако $x \notin E \backslash \{x_0\}$, па је $\lim\limits_{x_0} g \circ f = \lim\limits_{x_0} g \circ f^*$. Из дефиниције граничне вредности следи да је функција $f^*(x)$ непрекидна у тачки x_0 и да је $f^*(x_0) = y_0$. Како је из услова теореме функција $g(y)$ непрекидна у y_0, то је композиција $g \circ f^*(x)$ непрекидна у x_0, па је

$$\lim_{x_0} g \circ f = \lim_{x_0} g \circ f^* = g \circ f^*(x_0) = g(f^*(x_0)) = g(y_0) = g(\lim_{x_0} f). \ \square$$

2.2. Уопштени лимес функције. Једнострани лимеси

Нека је $\delta > 0$ позитиван реалан број. Као што смо већ видели, δ-околина $U(x_0, \delta)$ тачке $x_0 \in \mathbf{R}$ је интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Уведимо сада појам леве и десне δ-околине тачке x_0. Интервал $[x_0, x_0 + \delta)$ $[(x_0 - \delta, x_0]]$ се зове *десна* δ*-околина* [*лева* δ*-околина*] тачке x_0 и означава се са $U(x_0+0,\delta)$ $[U(x_0-0,\delta)]$; скуп $U(x_0+0,\delta)$ $[U(x_0-0,\delta)]$ се такође зове и *δ-околина* тачке x_0+0 $[x_0-0]$. Под δ-околином тачке $-\infty$ $[+\infty]$ у $\overline{\mathbf{R}}$ сматраћемо интервал $[-\infty,-\delta)$ $[(\delta,+\infty]]$ који се означава са $U(-\infty,\delta)$ $[U(+\infty,\delta)]$; δ-околина тачке ∞ биће скуп $U(\infty,\delta)=[-\infty,-\delta)\cup(\delta,+\infty]$. Сада по аналогији са шупљом δ-околином тачке x_0 можемо увести шупљу δ-околину тачака x_0-0, x_0+0, $-\infty$, $+\infty$ и ∞ редом као скупове

$$\begin{aligned}
&\dot{U}(x_0-0,\delta)=U(x_0-0,\delta)\backslash\{x_0\}=(x_0-\delta,x_0)\\
&\dot{U}(x_0+0,\delta)=U(x_0+0,\delta)\backslash\{x_0\}=(x_0,x_0+\delta)\\
&\dot{U}(-\infty,\delta)=U(-\infty,\delta)\backslash\{-\infty\}=(-\infty,-\delta)\\
&\dot{U}(+\infty,\delta)=U(+\infty,\delta)\backslash\{+\infty\}=(\delta,+\infty)\\
&\dot{U}(\infty,\delta)=U(\infty,\delta)\backslash\{-\infty,+\infty\}=(-\infty,-\delta)\cup(\delta,+\infty)
\end{aligned}$$

(у запису x_0-0, x_0+0 увек ћемо сматрати да је $x_0\in\mathbf{R}$).

Посматрајмо сада реалну функцију реалне промењиве $f\colon E\to\mathbf{R}$, $E\subseteq\mathbf{R}$. То да је број A гранична вредност функције f у тачки $a\in E'$ означавали смо са $A=\lim\limits_{x\to a}f(x)$, и досад смо претпостављали да су a и A коначни реални бројеви. Уопштимо сад појам граничне вредности функције f и на случај када и a и A могу бити и један од елемената облика x_0-0, x_0+0, $-\infty$, $+\infty$ и ∞.

Тачка a је *тачка нагомилавања* скупа $E\subseteq\mathbf{R}$, $a\in E'$, ако $\dot{U}(a,\varepsilon)\cap E\neq\emptyset$ за свако $\varepsilon>0$. На пример, $-\infty\in E'$, ако је $(-\infty,-\varepsilon)\cap E\neq\emptyset$ за свако $\varepsilon>0$; $x_0+0\in E'$, ако је $(x_0,x_0+\varepsilon)\cap E\neq\emptyset$ за свако $\varepsilon>0$.

Сада, као и у случају када су a и A из $\mathbf{R}$, A је гранична вредност функције $f(x)$ у тачки $a\in E'$, ако важи формула

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ f(\dot{U}(a,\delta)\cap E)\subseteq U(A,\varepsilon). \tag{4}$$

На пример, ако је $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=y_0+0$, онда важи формула

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in E)\ x>\delta\Rightarrow y_0\le f(x)<y_0+\varepsilon. \tag{5}$$

Ако је $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=y_0+0$, онда важи формула

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in E)\ x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow y_0\le f(x)<y_0+\varepsilon. \tag{6}$$

Пример 2. Покажимо да је $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, ако је $a > 1$, тј. покажимо да важи формула

$$(\forall E > 0)(\exists \Delta > 0)(\forall x \in \mathbf{R})\ x > \Delta \Rightarrow a^x > E.$$

Није тешко видети да при произвољно узетом $E > 0$ произвољан позитиван број Δ већи од вредности $\log_a E$ задовољава услов горе наведене формуле.

Приметимо да смо овде уместо ε и δ у формули за граничну вредност писали, као што се то често чини, E и Δ, да би смо некако нагласили да се формула проверава, у суштини, за велике вредности ε и δ (овде E није ознака за домен посматране функције). $\square$

Уоштимо сада и конвергенцију реалног низа (x_n) ка тачки a, где a може бити не само из $\mathbf{R}$, него и било који од елемената $x_0 - 0$, $x_0{+}0$, $-\infty$, $+\infty$ и ∞ (конвергенцију ка бесконачним елементима смо већ разматрали, али није на одмет поновити још једанпут исто, али сада у другом контексту). Кажемо да низ реалних бројева (x_n) *конвергира* ка a, ако важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U(a, \varepsilon).$$

На пример, низ реалних бројева (x_n) конвергира ка $x_0 - 0$, ако важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\ n \geq n_0 \Rightarrow x_0 - \varepsilon < x_n \leq x_0,$$

односно, конвергира ка $x_0 + 0$ ако важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\ n \geq n_0 \Rightarrow x_0 \leq x_n < x_0 + \varepsilon.$$

Нека је $f\colon E \to \mathbf{R}$, $E \subseteq \mathbf{R}$, и $a \in E'$. Реални низ (x_n) је (a, f)-*низ*, ако $(x_n) \to a$ и $x_n \in \hat{E}$ за свако природно n, где је $\hat{E} = E \setminus \{x_0\}$, ако је a једнако x_0, $x_0 - 0$ или $x_0 + 0$, и $\hat{E} = E$, ако је a једнако $-\infty$, $+\infty$ или ∞. Није тешко показати да важе теореме еквивалентне теоремама 1 и 2, које у том случају гласе

Теорема 6. *Нека је $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subseteq \mathbf{R}$, реална функција реалне променљиве и $a \in E'$. Гранична вредност функције f у тачки a је елемент A акко је $(f(x_n)) \to A$ за сваки (a, f)-низ (x_n).*

Теорема 7. *Нека је $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subseteq \mathbf{R}$, реална функција реалне променљиве и $a \in E'$. Гранична вредност функције f у a је елемент A акко је $(f(x_n)) \to A$ за сваки строго монотони (a, f)-низ (x_n).*

Тврђење аналогно тврђењу последице 1 такође важи. Приметимо да ако је низ (x_n) строго монотон и конвергира ка $x_0 - 0$ $[x_0 + 0]$, онда је он строго растући [опадајући].

До уопштених лимеса облика

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A,$$

где је A (коначан) реалан број, можемо доћи и на мало другачији начин него што смо то учинили горе.

Дати су метрички простори X и Y, и функција $f\colon E \to Y$, $E \subseteq X$. Уочен је неки скуп $G \subseteq E$ и тачка $x_0 \in G'$. Граничну вредност функције $f|_G$ у тачки x_0, ако постоји, зовемо *лимес функције* f *по скупу* G *у тачки* x_0, и означавамо са $\lim\limits_{x_0,G} f$ или са $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in G} f(x)$; дакле, имамо да је

$$\lim_{x_0,G} f = \lim_{x_0} f|_G.$$

Ако је $f\colon E \to \mathbf{R}$, $E \subseteq \mathbf{R}$, реална функција реалне променљиве и x_0 тачка нагомилавања скупа $G = E \cap (x_0, +\infty)$ $[G = E \cap (-\infty, x_0)]$, онда граничну вредност

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x_0,\, G} f \quad [f(x_0 - 0) = \lim_{x_0,\, G} f],$$

ако постоји, зовемо *десни лимес* [*леви лимес*] *функције* f *у тачки* x_0. Леви и десни лимес функције f у тачки x_0 се зову једним именом *једнострани лимеси функције* f *у тачки* x_0.

Очигледно, да је

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) \quad [f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)].$$

Другим речима, ако је $A = f(x_0 - 0)$, онда важи формула

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in E)\ x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \tag{7}$$

а ако је $A = f(x_0 + 0)$ онда важи формула

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in E)\ x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{8}$$

Теорема 8. *Дата је функција* $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subseteq \mathbf{R}$, *и нека је* x_0 *тачка нагомилавања скупова* $E \cap (x_0, +\infty)$ *и* $E \cap (-\infty, x_0)$. *Тада, оба једнострана лимеса* $f(x_0 - 0)$ *и* $f(x_0 + 0)$ *у тачки* x_0 *постоје и једнаки су некој вредности* y_0 *ако и само ако је* $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Доказ. Прво претпоставимо да једнострани лимеси $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ постоје и да је $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = y_0$, тј. претпоставимо да формуле (7) и (8) важе за $A = y_0$. Покажимо да је онда $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, тј. важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)\; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \tag{9}$$

Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. За тако изабрано ε изаберимо δ_1 тако да је за свако $x \in E$ из $x_0 - \delta_1 < x < x_0$ следи $|f(x) - A| < \varepsilon$. Такође за дато ε изаберимо δ_2 тако да је за свако $x \in E$ из $x_0 < x < x_0 + \delta_2$ следи $|f(x) - A| < \varepsilon$. Није тешко видети да је за $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ формула (9) тачна.

То да $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ повлачи $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = y_0$, тј. да (9) повлачи (7) и (8), следи из чињенице да су интервали $x_0 - \delta < x < x_0$ и $x_0 < x < x_0 + \delta$ подскупови интервала $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. $\square$

Ако у лимесима облика $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, дозволимо да је A једна од коначних вредности $y_0 - 0$ и $y_0 + 0$, или један од бесконачних елемената $-\infty$, $+\infty$ или ∞, онда долазимо до појма *уопштеног једностраног лимеса*. Теорема слична горњој може се и у случају оваквих лимеса формулисати. Остављамо читаоцу да се у то убеди сам.

У циљу лакшег изражавања допустићемо и бесконачне елементе облика $-\infty + 0$ и $+\infty - 0$ (овакве 'комбинације' ће се, углавном, појављивати имплицитно у формулацијама неких теорема). Како је $-\infty$ најмања ('лево' од ње нема других елемената), а $+\infty$ највећа вредност ('десно' од ње нема других елемената) у проширеном скупу реалних бројева, то ћемо сматрати да је $-\infty + 0 = -\infty$ и $+\infty - 0 = +\infty$; изрази $-\infty - 0$ и $+\infty + 0$ за нас неће имати смисла. Такође, убудуће, често са $f(-\infty)$ и $f(+\infty)$ означавамо редом граничне вредности $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2.3. Основна својства лимеса

Сви лимеси који се разматрају у овом поглављу, ако другачије није речено, су уопштени лимеси од реалних функција реалне променљиве.

Нека је a један од коначних или бесконачних елемената уочених у претходном поглављу. Наведимо неке конвенције којих ћемо се у даљем тексту придржавати.

Кажемо да је a је бесконачан елемент одређеног знака, ако је једнак $-\infty$ или $+\infty$.

Ако је a један од коначних елемената x_0, $x_0 - 0$ или $x_0 + 0$, онда означимо са $<a>$ број x_0. Ако је a једнако или $-\infty$, или $+\infty$, онда је $< a >= a$. Нека је сваки од елемената a и b или било који од овде разматраних коначних елемената, или $-\infty$, или $+\infty$. Кажемо да је $a < b$ (или $b > a$), ако је $< a ><< b >$. Кажемо да је елемент a позитиван [негативан], ако је $a > 0$ $[a < 0]$. Пишемо да је $a \leq b$ (или $b \geq a$), ако је или $a < b$, или је пар (a, b) једнак неком од парова $(x_0 - 0, x_0 - 0)$, $(x_0 - 0, x_0)$, $(x_0 - 0, x_0 + 0)$, (x_0, x_0), $(x_0, x_0 + 0)$ и $(x_0 + 0, x_0 + 0)$ за неки реалан број $x_0 \in \mathbf{R}$.

Теорема 9. *Функције $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ су дефинисане у некој шупљој околини тачке a. Важе следећа тврђења:*

1° *Ако функција f у тачки a има коначну граничну вредност, тада је функција f у некој шупљој околини $\dot{U}(a, \delta)$ те тачке ограничена.*

2° *Ако је $\lim\limits_{x \to a} f(x) > 0$ $[\lim\limits_{x \to a} f(x) < 0]$, тада постоји $\delta > 0$ тако да је $f(x) > 0$ $[f(x) < 0]$ за свако $x \in \dot{U}(a, \delta)$.*

3° *Ако постоји $\delta > 0$ и $C \in \mathbf{R}$ такво да је $f(x) = C$ за свако $x \in \dot{U}(a, \delta)$, онда је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C$.*

4° *Ако постоји $\delta > 0$ такво да је $f(x) \leq g(x)$ $[f(x) < g(x)]$ за свако $x \in \dot{U}(a, \delta)$, и постоје $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, онда је $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.*

5° *Ако постоји $\delta > 0$ тако да је вредност $g(x)$ између вредности $f(x)$ и $h(x)$ за свако $x \in \dot{U}(a, \delta)$, и постоје $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} h(x)$, тако да је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = A$, онда је $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.*

Доказ. Тврђење 1° следи директно из дефиниције лимеса. Покажимо, рецимо, тврђење 2°. Претпоставимо, рецимо, да је $A =$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ (слично разматрамо случај и када је $A < 0$). Дакле, A је један од елемената y_0, y_0-0, или y_0+0, где је y_0 позитиван реалан број, или је $A = +\infty$. Размотримо случај коначног A (на сличан начин се разматра и случај бесконачног A). Нека је $\varepsilon = y_0/2$ и одредимо $\delta > 0$ тако да важи формула (4) и да је функција $f(x)$ дефинисана у шупљој околини $\dot{U}(a,\delta)$ (из услова теореме следи да такво $\delta > 0$ постоји). Али тада за свако $x \in \dot{U}(a,\delta)$, важи $|f(x) - y_0| < \varepsilon$ (овом неједнакошћу су обухваћени и случајеви $y_0 \le f(x) < y_0 + \varepsilon$ и $y_0 - \varepsilon < f(x) \le y_0$), а одавде следи да је $(1/2)y_0 < f(x) < (3/2)y_0$, па је $f(x) > 0$.

Тврђења $3°$–$5°$ се доказују применом теореме 1 и одговарајућих теорема које важе за низове. Рецимо, покажимо тврђење $5°$. Узмимо произвољан (a, fgh)-низ (x_n) (функција fgh је дефинисана само тамо где су истовремено дефинисане дате три функције). Уочимо низове $(f(x_n))$, $(g(x_n))$ и $(h(x_n))$. Из услова тврђења следи да је $g(x_n)$ између $f(x_n)$ и $h(x_n)$ почев од неког довољно великог броја n. Такође из $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = A,$$

па из теореме 6.13 следи да је $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$, а како је (x_n) произвољан (a, fgh)-низ, одавде сада следи да је $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. $\Box$

Напомена. Ако је функција $f(x)$ у некој шупљој околини $\dot{U}(a)$ тачке a константна, тј. $f(x) = C$ за свако $x \in \dot{U}(a)$ и неки реалан број C, тада за $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ можемо узети било који од елемената $C - 0$, C и $C + 0$.

Последица 2. *Ако постоји $\delta > 0$ такво да је $f(x) \le C$ $[f(x) < C]$ за свако $x \in \dot{U}(a,\delta)$ и неки реалан број C, и постоји $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, тада је $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le C$.*

Доказ. Ако узмемо функцију $g(x)$ такву да је $g(x) = C$ за свако $x \in \dot{U}(a,\delta)$, онда тврђње следи из $3°$ и $4°$ претходне теореме. $\Box$

Аналогно се показује да важи и следеће тврђење.

Последица 3. *Ако постоји $\delta > 0$ такво да је $f(x) \ge C$ $[f(x) > C]$ за свако $x \in \dot{U}(a,\delta)$ и неки реалан број C, и постоји $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, тада је $\lim\limits_{x\to a} f(x) \ge C$.*

Опишимо једну "малу аритметику" са уведеним коначним и бесконачним елементима. Ова аритметика се даје у облику 3 групе правила за рачунање (нека од ових правила смо раније већ наводили), где је класификација извршена по основним аритметичким операцијама (свако правило се односи само на једну од њих). Комутативност операција сабирања и множења се претпоставља и у случају ових нових елемената.[1]

А. Основна правила за сабирање су:

$$(x_0 \pm 0) + (y_0 \pm 0) = (x_0 + y_0) \pm 0, \qquad (x_0 \pm 0 \,|\, x_0) + \infty = \infty.$$
$$(x_0 \pm 0 \,|\, x_0) + (y_0 \mp 0 \,|\, y_0) = x_0 + y_0,$$
$$(x_0 - 0 \,|\, x_0 \,|\, x_0 + 0 \,|\, \pm \infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

Правило свођења разлике на збир је $x - y = x + (-y)$, где је $-(x_0 \pm 0) = -x_0 \mp 0$, $-(\pm\infty) = \mp\infty$ и $-(\infty) = \infty$.

Б. Основна правила за множење, у случају када је $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$, су:

$$(x_0 \pm 0)(y_0 \pm 0) = (x_0 y_0) \pm 0, \quad (x_0 \pm 0)(y_0 \mp 0) = x_0 y_0.$$

Правилом $-(x_0 \pm 0) = -x_0 \mp 0$ сводимо случај $x_0 \neq 0$ и $y_0 \neq 0$ на претходни (придржавамо се слободно формалних правила за оперисање са минусима и плусевима).

На пример, имамо

$$(3+0)(-2-0) = -(3+0)(2+0) = -(6+0) = -6-0,$$
$$(-1+0)(2+0) = -(1-0)(2+0) = -2.$$

Означимо краће са $+0$ и -0 редом елементе $0+0$ и $0-0$. Ако је $x_0 > 0$, онда је

$$(x_0 \,|\, x_0 \pm 0 \,|\, +0)\,(+0) = +0, \quad (x_0 \,|\, x_0 \pm 0 \,|\, +0) \cdot 0 = 0.$$

[1] Ако се у изразу појављују ознаке $\mp$ и $\pm$, онда се датим изразом 'кодирају' два правила: прво се добија када се свуда уместо ових ознака ставе операције из 'горњег регистра' ($-$ и $+$), а друго када се ставе операције из 'доњег регистра' ($-$ и $+$). Ако се у изразу појављују подизрази облика $(.\,|\,.\,|\,\ldots\,|\,.)$, онда се правила генеришу узимањем по једне варијанте од неколико њих одвојених знаком $|$ (добијени израз може садржавати знаке $\mp$ и $\pm$, и у том случају он, уствари, генерише два правила за рачунање).

Користимо се такође правилима $-(0) = 0$ и $-(+0) = -0$.

Рецимо,

$$\begin{aligned}&(-0)(-0) = [-(+0)][-(+0)] = (+0)(+0) = +0,\\&(+0)(-3-0) = -0, \quad (-0)(-4-0) = +0\end{aligned}$$

Ако је један од елемената бесконачан и $x_0 > 0$, тада је

$$(x_0 \,|\, x_0 \pm 0 \,|\, +\infty)\,(+\infty) = +\infty, \quad (x_0 \,|\, x_0 \pm 0 \,|\, +\infty) \cdot \infty = \infty;$$

случаји када је $x_0 < 0$ се разрешавају као што смо то чинили горе.

Рецимо

$$\begin{aligned}&(-\infty)(-4+0) = [-(+\infty)][-(4-0)] = (+\infty)(4-0) = +\infty,\\&(\infty)(-3-0) = [-(\infty)](3+0) = (\infty)(3+0) = \infty.\end{aligned}$$

В. Ако су a и b било који коначни или бесконачни елементи, онда је $a/b = a\,(1/b)$. При томе важе правила:

$$\frac{1}{+0} = +\infty, \ \frac{1}{-0} = -\infty, \ \frac{1}{0} = \infty, \ \frac{1}{+\infty} = +0, \ \frac{1}{-\infty} = -0, \ \frac{1}{\infty} = 0;$$

ако је $x_0 > 0$, онда је

$$\frac{1}{x_0+0} = \frac{1}{x_0} - 0, \quad \frac{1}{x_0-0} = \frac{1}{x_0} + 0,$$

и ако је a један од коначних елемената, онда је $1/(-a) = -(1/a)$.

Г. За апсолутну вредност важи да је

$$|(\pm\infty \,|\, \infty)| = +\infty \quad \text{и} \quad |(\pm 0 \,|\, 0)| = +0,$$

а ако је $x_0 > 0$, онда је

$$|x_0 \pm 0| = x_0 \pm 0 \quad \text{и} \quad |-x_0 \pm 0| = -x_0 \mp 0.$$

Тврђења следеће теореме се доказују применом теореме 1 и одговарајућих теорема које важе за низове, као што смо то учинили у случају тврђења 5° претходне теореме.

Теорема 10. *Дате су реалне функције реалне променљиве $f(x)$ и $g(x)$ дефинисане у некој шупљој околини тачке a, и нека постоје $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Тада важе следећа тврђења:*

6° *Ако вредност* $\alpha A + \beta B$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, *постоји (у смислу горе наведене аритметике), онда постоји* $\lim\limits_{x\to a}[\alpha f(x) + \beta g(x)]$ *и при томе је*

$$\lim_{x\to a}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x).$$

7° *Ако производ* AB *постоји, онда постоји* $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ *и*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x).$$

8° *Ако је* $g(x) \neq 0$ *у некој шупљој околини тачке* a *и постоји количник* A/B, *онда постоји* $\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]$ *и при томе је*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

9° *Ако је* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, *онда важи* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |A|$.

Напомена. Теореме 9 и 10 остају тачне и ако претпоставимо да су функције $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ реалне функције, тј. да сликају неки подскуп E метричког простора X у $\mathbf{R}$.

Последица 4. *Реалне функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *су дефинисане у некој шупљој околини тачке* a. *Ако је* $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, *тада постоји* $\delta > 0$ *тако да је* $f(x) < g(x)$ *за свако* $x \in \dot{U}(a, \delta)$.

Доказ. Из теореме 10 имамо да је $\lim\limits_{x\to a}[g(x) - f(x)] = \lim\limits_{x\to a} g(x) - \lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$, па на основу 2° из теореме 9 следи да постоји $\delta > 0$ тако да је $0 < g(x) - f(x)$, тј. $f(x) < g(x)$, за свако $x \in \dot{U}(a, \delta)$. $\square$

Правило које ћемо показати у следећој теореми често се примењује при израчунавању лимеса.

Теорема 11. *Функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *су дефинисане у некој шупљој околини тачке* x_0, *и у тој околини* $f(x) > 0$. *Ако је* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, *где су* a *и* b *реални бројеви и* $a > 0$, *онда је* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$.

Доказ. Ако применимо теореме 5 и 10 имамо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)} = e^{b\ln a} = a^b. \square$$

У случају реалних функција реалне променљиве уопштимо појам композиције две функције. Нека су $f : E \to \mathbf{R}$ и $g : F \to \mathbf{R}$ две реалне функције реалне променљиве. Композиција ове две функције биће функција $g \circ f : W \to \mathbf{R}$, где је $W \subseteq E$ скуп свих реалних x за које вредност $g \circ f(x) = g(f(x))$ постоји.

Теорема 12. [замена променљиве код лимеса] *Дате су реалне функције реалне променљиве $f : E \to \mathbf{R}$ и $g : F \to \mathbf{R}$, и нека је $g \circ f : W \to \mathbf{R}$ њихова композиција. Нека је, даље, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и нека постоји $\lim\limits_{y\to b} g(y)$, где је $a \in W'$ и $b \in F'$. Ако при томе постоји $\delta > 0$ такво да је $f(x) \neq b$ за свако $x \in \dot{U}(a,\delta) \cap W$, онда је*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y).$$

Доказ. Нека је (x_n) произвољан $(a, g \circ f)$-низ. Из $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ следи да $(f(x_n)) \to b$. Како на конвергенцију низа не утиче одбацивање првих коначно много чланова, то из услова да постоји $\delta > 0$ такво да је $f(x) \neq b$ за свако $x \in \dot{U}(a,\delta) \cap W$, можемо претпоставити да је $f(x_n) \neq b$ за свако природно n, тј. низ $(f(x_n))$ је један (b, g)-низ. Сада из постојања $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ и теореме 1 следи да $(g[f(x_n)]) \to \lim\limits_{y\to b} g(y)$. Пошто ово важи за сваки $(a, g\circ f)$-низ, онда опет применом теореме 1 добијамо да наше тврђење важи. $\square$

Последица 5. *Дате су реалне функције реалне променљиве f и g, које су дефинисане редом у неким шупљим околинама тачака a и b, и нека постоје лимеси*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{y\to b} g(y).$$

Ако при томе постоји реално $\delta > 0$ такво да је $f(x) \neq b$ за свако $x \in \dot{U}(a,\delta)$, онда је

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y).$$

Доказ. Тачка b је тачка нагомилавања области дефинисаности функције g, па када би показали да је a тачка нагомилавања домена функције $g \circ f$, тврђење би следило из претходне теореме. Из услова тврђења следи да постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $g(y)$ дефинисано на $\dot{U}(b, \varepsilon)$. Функција $f^*(x)$ је непрекидна у a (види дефиницију граничне вредности функције у задатој тачки), па постоји δ_0, $0 < \delta_0 < \delta$, такво да је $f^*(U(a, \delta_0)) \subseteq U(b, \varepsilon)$, а из услова теореме је $f^*(\dot{U}(a, \delta_0)) \subseteq \dot{U}(b, \varepsilon)$. Дакле функција $g \circ f$ је дефинисана на $\dot{U}(a, \delta_0)$, па је тачка a тачка нагомилавања области дефинисаности ове функције. $\square$

Пример 3. Услов да постоји $\delta > 0$ такво да је $f(x) \neq b$ за свако $x \in \dot{U}(a, \delta)$, у претходној последици (и теореми), је битан. Наиме узмимо функције $f(x) = 0$ за свако реално x и $g(x) = |\operatorname{sgn} x|$. Приметимо да је $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1$, али није $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x)) = 1$, јер је свуда $g(f(x)) = 0$, па је $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x)) = 0$. Последицу 5 не можемо применити у случају ове две функције, јер наведени услов, очигледно, није задовољен. $\square$

Последица 6. *За реалне функције реалне променљиве f и $\hat{f}$ постоје бројеви $\varepsilon' > 0$ и $\varepsilon'' > 0$ такви да је $f(x) \neq b$ за свако $x \in \dot{U}(a, \varepsilon')$, $\hat{f}(y) \neq a$ за свако $y \in \dot{U}(b, \varepsilon'')$ и $f(\hat{f}(y)) = y$ за свако $y \in \dot{U}(b, \varepsilon'')$. Нека је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y \to b} \hat{f}(y) = a$, и нека је на $\dot{U}(b, \varepsilon'')$ дефинисана реална функција g. Тада лимес $\lim\limits_{y \to b} g(y)$ постоји ако и само ако постоји лимес $\lim\limits_{x \to a} g(f(x))$, и ако они постоје они су једнаки.*

Доказ. Последица 5 обезбеђује да из постојања лимеса $\lim\limits_{y \to b} g(y)$ следи постојање лимеса $\lim\limits_{x \to a} g(f(x))$, и $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y \to b} g(y)$.

Ако сада последицу 5 применимо на композицију функција $\hat{f}$ и $g \circ f$, добијамо да је $\lim\limits_{y \to b} (g \circ f)(\hat{f}(y)) = \lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x)$. Али како је $(g \circ f)(\hat{f}) = g \circ (f \circ \hat{f}) = g$ на $\dot{U}(b, \varepsilon'')$, то постоји $\lim\limits_{y \to b} g(y)$ и једнак је $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x)$. $\square$

Овде и у следећим поглављима, када говоримо о постојању коначног лимеса, имамо у виду граничну вредност у ужем смислу, која је једнака неком реалном броју, ако говоримо о бесконачном лимесу [бесконачном лимесу одређеног знака], онда имамо у виду граничну вредност у ширем смислу, једнаку $-\infty$, $+\infty$ или ∞ [$-\infty$ или $+\infty$]. Следећа три тврђења су формулисана за растуће реалне функције, али важе аналогна и за опадајуће реалне функције.

У свим теоремама овог поглавља интервал (a, b) је произвољан, коначан или бесконачан, отворен интервал.

Теорема 13. *Ако је растућа функција* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ *ограничена одоздо [одозго], онда постоји коначан лимес*

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) \quad [f(b-0) = \lim_{x \to b-0} f(x)]$$

и важи да је

$$f(a+0) = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \quad \left[f(b-0) = \sup_{x \in (a,b)} f(x) \right].$$

Доказ. Претпоставимо да је функција f ограничена одоздо и да је a коначна вредност (остали случајеви се разматрају слично). Тада постоји $A = \inf\limits_{x \in (a,b)} f(x)$. Покажимо да је $f(a+0) = A$ (види формулу (8)). Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Из дефиниције инфимума следи да обавезно постоји $x' \in (a, b)$ такво да је $A < f(x') < A + \varepsilon$. Узмимо $\delta = x' - a$ и покажимо да за тако изабрано δ важи формула (7). И тако, нека је $a < x < a + \delta = a + (x' - a) = x'$. Како је функција растућа, имамо да је $A < f(x) \le f(x') < A + \varepsilon$, па је $|f(x) - A| < \varepsilon$, што је и требало показати. □

Теорема 14. *Ако растућа функција* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ *није ограничена одоздо [одозго], онда је*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = -\infty \quad \left[\lim_{x \to b-0} f(x) = +\infty \right],$$

Пример 4. Тако, на пример, имамо да је $\operatorname{sgn}(+0) = 1$, $\operatorname{sgn}(+\infty) = 1$, $\operatorname{sgn}(-\infty) = -1$, $\ln(+0) = -\infty$, $a^{+\infty} = +\infty$ и $\operatorname{arctg}(-\infty) = -\pi/2$. $\Box$

Последица 7. *Ако је $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ растућа функција, тада за свако $x_0 \in (x_1, x_2)$, где је $[x_1, x_2] \subseteq (a,b)$ произвољни затворени подинтервал интервала (a,b), важи да је*

$$f(x_1) \leq f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0) \leq f(x_2).$$

Доказ. Посматрајмо функцију $f(x)$ на интервалу $x_1 < x_0$. Она је растућа и ограничена одозго, рецимо вредношћу $f(x_0)$, на том интервалу, па можемо применити претходну теорему. Дакле имамо

$$f(x_1) \leq f(x_0 - 0) = \sup_{x \in (x_1, x_0)} f(x) \leq f(x_0).$$

Слично показујемо да важи и

$$f(x_0) \leq f(x_0 + 0) = \inf_{x \in (x_0, x_2)} f(x) \leq f(x_2). \Box$$

Теорема 15. *Ако је функција $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ непрекидна и строго расте [опада] на (a,b), тада је инверзна функција f^{-1} дефинисана, непрекидна и строго расте [опада] на интервалу $(f(a+0), f(b-0))$.*

Доказ. Посматрајмо случај строго растуће функције f (аналогно се разматра и случај, када је f строго опадајућа функција). Нека су (x_n) и (x'_n) низови у (a,b) такви да је $(x_n) \to a+0$, $(x'_n) \to b-0$ и $x_n < x'_n$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Означимо са $y_n = f(x_n)$ и $y'_n = f(x'_n)$ за свако $n \in \mathbf{N}$; очигледно да је $y_n < y'_n$. Даље, нека је $f_i = f|_{[x_i, x'_i]}$. Из теореме 1.7 следи да за f_i постоји инверзна функција f_i^{-1} дефинисана, строго растућа и непрекидна на интервалу $[y_i, y'_i]$. Пошто $(x_n) \to a+0$, $(x'_n) \to b-0$, то $(y_n) \to f(a+0)$, $(y'_n) \to f(b-0)$.

Узмимо сада произвољно $y \in (f(a+0), f(b-0))$. Нека је $i \in \mathbf{N}$ такво да је $y \in (y_i, y'_i)$. Тада узмимо да је $f^{-1}(y) = f_i^{-1}(y)$. Није тешко проверити да функција f^{-1} задовољава услове теореме. $\Box$