# Лекција 1

## РЕАЛНА ФУНКЦИЈА РЕАЛНЕ ПРОМЕНЉИВЕ. НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈА

- Функционална зависност. Начини задавања функција
- Елементарне функције. Класификација елементарних функција
- Основне особине функција: ограниченост, монотоност, парност итд.
- Непрекидност у тачки. Непрекидне функције
- Униформна непрекидност

### 1.1. Функционална зависност. Начини задавања функција

Сви односи у природи су узрочно-последичног карактера, а неке од њих смо у стању да изразимо у облику физичких закона, у којима једне физичке величине зависе од других, тј. у облику *функционалне зависности* тих величина. Та функционална зависност понекад се изражава аналитички, формулом, али то не мора увек бити случај. Случај када постоји формула је случај када је функционалну зависност могуће представити у најпростијем облику и често је то могуће урадити само захваљујући иделизацијама и поједностављењима која чинимо при моделовању посматране појаве. С тачке гледишта математичке анализе само овај начин и представља интерес. Други начин за представљање функционалне зависности су таблице. На пример, посматра се експериментално како зависи температура кључања $\theta$ неке течности од притиска $p$ и формира се одговарајућа таблица. Може се функционална зависност представити директно графиком. На пример, барограф[1] црта барограм, график промене атмосферског притиска током дана.

[1] Барограф, самопишући прибор, је метереолошки инструмент за регистрацију промена атмосферског притиска. Ради на принципу барометра којем је придодат регистрациони уређај.

Једну од величина у функционалној зависности проглашавамо зависном, а друге независнима. Одговарајуће променљиве у аналитичком изразу тада зовемо *зависна променљива* и *независна променљива*. Рецимо постоји такозвана барометријска формула:

$$p = p_0 e^{kh},$$

где је $p_0$ — атмосферски притисак на нивоу мора, $k$ — нека константа, $h$ — висина на којој се атмосферски притисак мери и $p$ — атмосферски притисак на датој надморској висини $h$. У овој формули $p$ је зависна променљива или функција, а $h$ независна променљива или аргумент.

Која ће величина односно променљива бити зависна, односно независна, зависи више од циљева и потреба посматрања него од саме природе ствари. На пример, ако се из барометријске формуле изрази $h$ преко $p$ добија се формула

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p},$$

која би за пилота била много важнија, јер преко притиска даје висину, у овом случају, авиона, а овде је $p$ аргумент, а $h$ функција.

Није тешко приметити, да је савремени појам функције, који смо увели у глави 2, математички модел функционалне зависности. Скуп реалних бројева, које независна променљива у некој фунционалној зависности може узимати, или како смо га звали — област дефинисаности или домен одговарајуће функције, је природно одређен карактером дате функционалне зависности. На пример, закон слободног пада гласи

$$s = \frac{gt^2}{2}.$$

За вредности независне променљиве $t$ апсурдно је узимати чак сваки ненегативан реалан број, јер када се тело нађе на земљи више нема смисла посматрати дато кретање, тј., лако је видети, да $t$ узима вредности са затвореног интервала $[0, \sqrt{2h/g}]$, где је $h$ висина са које се тело баца. Приметимо да дату функцију чисто формално има смисла посматрати за свако $t$.

Приметимо да неке функције није могуће изразити формулом. На пример, то је чест случај са функцијама из теорије бројева. Рецимо, таква је Ојлерова функција $\varphi(n)$, која за сваки природан број $n$ даје број свих бројева у низу $1, 2, \ldots, n-1, n$ који су узајамно прости са $n$. Тако, на пример,

$$\varphi(1) = 1,\ \varphi(2) = 1,\ \varphi(3) = 2,\ \varphi(4) = 2,\ \varphi(5) = 4,\ \varphi(6) = 2 \text{ итд.}$$

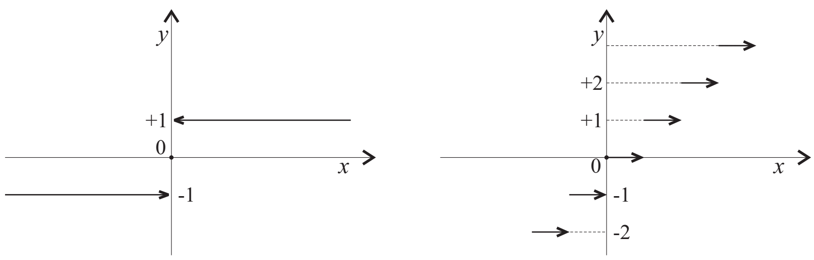
Неке функције није могуће изразити једном формулом за све вредности. На пример, Дирихлеова функција се дефинише на следећи начин:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ рационално} \\ 0, & x \text{ ирационално} \end{cases}$$

То је случај и са функцијом *сигнум од* $x$:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ако је } x < 0, \\ 0, & \text{ако је } x = 0, \\ 1, & \text{ако је } x > 0. \end{cases}$$

У даљем тексту, често ћемо помињати и реалну функцију реалне променљиве $y = [x]$, *целобројна вредност* од $x$, коју дефинишеме као највећи цео број који је мањи или једнак од дате реалне вредности $x$. На пример, $[2.7] = 2$, $[3] = 3$, $[-1.2] = -2$ итд. Први график доле, слева, је график функције $y = \operatorname{sgn}(x)$, а други функције $y = [x]$.




Класа реалних функција која ће за нас бити првенствено од интереса је класа тзв. елеменатраних функција. Она је и главни објекат дела математичке анализе којим ћемо се бавити у овој књизи.

## 1.2. Елементарне функције. Класификација елементарних функција

*Основне елементарне функције* су: константна функција $y = c$, где је $c$ произвољан реалан број; степена функција $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, при чему ако је $\alpha$ ирационалан или рационалан нецео број, онда узимамо да је $x > 0$; експоненцијална функција $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); инверзна функција за експоненцијалну, тј. логаритамска функција $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); тригонометријске функције $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$; инверзне тригонометријске функције $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

Свака функција која се може задати експлицитно формулом која се добија коначном применом основних аритметичких операција и суперпозиција од основних елементарних функција зове се *елементарна функција*. На пример, елементарне функције су:

$$y = 1 + \sqrt{\lg \cos 2\pi x}, \qquad y = \sin \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}) \quad \text{итд.}$$

Елементарне функције се обично класификују у следеће 4 групе:

1) *полиноми* (види главу 4);
2) *рационалне функције*, функције које нису полиноми, али се могу представити у облику количника два полинома;
3) *ирационалне функције*, функције које нису ни полиноми, ни рационалне функције, али се могу добити од рационалних и степених функција коначном применом аритметичких операција и суперпозиција;
4) *трансцедентне функције*, функције које не припадају ниједној од претходних класа.

Рецимо, функција

$$f(x) = 3x^6 + 4x^4 - 5x^3 + 1$$

је полином, функција

$$f(x) = \frac{3x^6 + 4x^4 - 5x^3 + 1}{x^7 - x^5 + 3}$$

је пример рационалне функције, функција

$$f(x) = (4x^3 - 5x + 1)^{2/3} + \frac{3x^6 + 4x^4 - 5x^3 + 1}{x^7 - x^5 + 3}$$

је пример ирационалне функције, а као примери трансцедентних функција могу послужити експоненцијална функција, логаритамска функција, тригонометријске функције и њихове инверзне функције. Ирационална функције су и *хиперболички синус* и *хиперболички косинус*, које се редом задају релацијама

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Оно што није тривијално показати је, на пример, да су функције $y = \sin x$ и $y = \log x$ трансцедентне, тј. да не припадају некој од прве три групе елементарних функција. На пример, функција $y = \sin x$ не може бити једнака неком полиному, јер полином има коначно нула, а синусна функција бесконачно; не може бити једнака некој рационалној, јер рационална функција или је неограничена, или има асимптоте у $+\infty$ и $-\infty$, а синусна функција је ограничена и без асимптота. Али показати да синусна функција није ирационална функција је много теже.

У даљем излагању претпостављаћемо да читаоц има основна знања о основним елементарним функцијама.

### 1.3. Основне особине функција: ограниченост, монотоност, парност итд.

Посматрајмо сада реалне функције, тј. функције типа $f : X \to \mathbf{R}$, где је $X$ произвољан скуп. Таква функција се зове *ограничена одоздо* [*ограничена одозго*], ако постоји реалан број $m$ [$M$] такав да је $m \leq f(x)$ [$f(x) \leq M$]. Ако је функција ограничена одозго и одоздо кажемо да је она *ограничена*. Лако је видети да је функција ограничена, ако постоји реалан број $M > 0$ такав да је $|f(x)| < M$.

Нека је сада $f : X \to \mathbf{R}$, $X \subseteq R$, реална функција реалне промењливе. Кажемо да је функција $f$ *растућа* [*опадајућа*] функција на $A$, $A \subseteq X$, ако за свако $x_1, x_2 \in A$ из $x_1 < x_2$ следи

$f(x_1) \leq f(x_2)$ $[f(x_1) \geq f(x_2)]$; кажемо да је $f$ *строго растућа* [*строго опадајућа*] функција на $A$, ако за свако $x_1, x_2 \in A$ из $x_1 < x_2$ следи $f(x_1) < f(x_2)$ $[f(x_1) > f(x_2)]$. Функција је *монотона* [*строго монотона*], ако је растућа или опадајућа [или строго растућа, или строго опадајућа].

Функција $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ је *парна* [*непарна*], ако за свако $x \in \mathbf{R}$ важи $f(-x) = f(x)$ $[f(-x) = -f(x)]$. Ако је функција парна њен график је симетричан у односу на $y$-осу, а ако је непарна њен график је централносиметричан у односу на координатни почетак.

Функција $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ је *периодична*, ако постоји реалан број $T \neq 0$ такав да је $f(x+T) = f(x)$ за свако $x \in \mathbf{R}$; такво $T$, ако постоји, зове се *период*. Скуп свих периода дате функције чини комутативну групу у односу на операцију $+$. Ако је функција периодична, тада је од интереса да се нађе не било који, него најмањи позитиван период; ако такав постоји онда се он зове *главним* (или *основним*) *периодом.*

**Пример 1.** Синусна и косинусна функција имају основни период $2\pi$, константна функција нема основни период, али је сваки реалан број различит од 0 њен период, период за Дирихлеову функцију је сваки рациналан број различит од 0. $\square$

Уопштимо појам периодичности и на функције које нису дефинисане свуда на скупу $\mathbf{R}$. Реална функција реалне променљиве $f : X \to \mathbf{R}$, $X \subseteq R$, је периодична, ако постоји $T \neq 0$ такво да је $x + T \in X$ и $f(x+T) = f(x)$ за свако $x \in X$. Такве су, рецимо, функције $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ (основни период ових функција је $\pi$).

Реална функција реалне променљиве $f\colon X \to \mathbf{R}$, $X \subseteq R$, има у тачки $x_0 \in X$ *локални минимум* [*локални максимум*], ако постоји реалан број $\varepsilon > 0$ тако да је $f(x_0) \leq f(x)$ $[f(x_0) \geq f(x)]$ за свако $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Кажемо да реална функција $f\colon X \to \mathbf{R}$ узима у тачки $x_0 \in X$ *најмању вредност* [*највећу вредност*], ако је $f(x_0) \leq f(x)$ $[f(x_0) \geq f(x)]$ за свако $x \in X$, тј. $f(x_0) = \min\limits_X f$ $[f(x_0) = \max\limits_X f]$.

## 1.4. Непрекидност у тачки. Непрекидне функције

Нека су $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$ два произвољна метричка простора. Функција $f\colon X \to Y$ из простора $X$ у простор $Y$ је *непрекидна у тачки* $x_0 \in X$, ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f[U(x_0, \delta)] \subseteq U(f(x_0), \varepsilon).$$

Овом дефиницијом непрекидности обухваћен је "идеални" случај: функција $f$ је задата на читавом простору $X$. Чешће се разматра општији случај, када су дата два метричка простора $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$, и функција $f : E \to Y$, где је $E \subseteq X$. Кажемо да је функција $f$ *непрекидна у тачки* $x_0 \in E$, ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f[U(x_0, \delta) \cap E] \subseteq U(f(x_0), \varepsilon).$$

Последња формула се не разликује много од прве, јер, у суштини, то је исто: ако функцију $f : E \to Y$ схватимо као функцију из потпростора $E$ простора $X$ у простор $Y$, онда је $\delta$-околина тачке $x_0$ у $E$ скуп $U(x_0, \delta) \cap E$ (овде је и даље са $U(x_0, \delta)$, означена $\delta$-околина тачке $x_0$ у простору $X$). Ако означимо домен функције $f$ са $D(f)$, онда принципијелна једнакост горњих формула постаје још очигледнија, јер оне обе су еквивалентне следећој формули

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f))\ d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

За нас ће посебно бити интересантан случај реалне функције реалне променљиве. Нека је, дакле, дата функција $f : E \to \mathbf{R}$, где је $E \subseteq \mathbf{R}$. Из горе датих дефиниција следи да је функција $f$ непрекидна у тачки $x_0 \in E$ ако важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Кажемо да је функција $f$ *непрекидна* на $A$, где је $A$ неки подскуп домена функције $f$, ако је непрекидна у свакој тачки скупа $A$. Ако је функција непрекидна у свим тачкама домена, кажемо да је она просто *непрекидна.*

**Теорема 1.** *За функцију $f : X \to Y$ из простора $X$ у простор $Y$ следећа тврђења су еквивалентна:*

(*i*) *f је непрекидна функција;*

(*ii*) *за сваки отворен скуп* $V$ *у* $Y$ *скуп* $f^{-1}(V)$ *је отворен у* $X$*;*

(*iii*) *за сваки затворен скуп* $F$ *у* $Y$ *скуп* $f^{-1}(F)$ *је затворен у* $X$*;*

(*iv*) *за свако* $A \subseteq X$ *важи да је* $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

*Доказ.* ($i \Rightarrow ii$) Претпостављамо да је функција $f$ непрекидна. Нека је $V$ отворен скуп у $Y$. Треба показати да је $f^{-1}(V)$ отворен скуп у $X$. Узмимо произвољно $x \in f^{-1}(V)$. Како је $V$ отворен скуп у $Y$, то за тачку $f(x)$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Како је функција $f$ непрекидна у свим тачкама домена, то је она непрекидна и у $x$, па за уочено $\varepsilon$ постоји $\delta$ такво да је $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Одавде имамо да је $U(x,\delta) \subseteq f^{-1}(V)$. Сада из теореме 1, глава 5, следи да је скуп $f^{-1}(V)$ отворен у $X$.

($ii \Rightarrow iii$) Претпоставимо сада да за сваки отворен скуп $V$ у $Y$ скуп $f^{-1}(V)$ је отворен у $X$, и узмимо произвољан затворен скуп $F$ у $Y$. Тада је $Y \backslash F$ отворен у $Y$, па је $f^{-1}(Y \backslash F)$ отворен у $X$. Али онда је $X \backslash f^{-1}(Y \backslash F) = f^{-1}(F)$ затворен у $X$.

($iii \Rightarrow iv$) Претпоставимо сада да за сваки затворен скуп $F$ у $Y$ скуп $f^{-1}(F)$ је затворен у $X$. Нека је $A \subseteq X$. Како је $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, то је $A \subseteq f^{-1}[f(A)] \subseteq f^{-1}[\overline{f(A)}]$. Сада из затворености скупа $f^{-1}[\overline{f(A)}]$ следи $\overline{A} \subseteq f^{-1}[\overline{f(A)}]$, тј. $f(\overline{A}) \subseteq f[f^{-1}[\overline{f(A)}]] \subseteq \overline{f(A)}$.

($iv \Rightarrow i$) Претпоставимо сада да за свако $A \subseteq X$ важи да је $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Узмимо произвољну тачку $x \in X$ и покажимо да је функција непрекидна у $x$. Узмимо произвољну куглу $U(f(x), \varepsilon)$. Уочимо скуп $A = X \backslash f^{-1}(U(f(x), \varepsilon))$. Тада је $f(A) \subseteq Y \backslash U(f(x), \varepsilon)$. Али онда је $\overline{f(A)} \subseteq Y \backslash U(f(x), \varepsilon)$, па је $f(\overline{A}) \subseteq Y \backslash U(f(x), \varepsilon)$. Одавде следи да тачка $x$ не припада $\overline{A}$, па постоји кугла $U(x,\delta) \cap A = \emptyset$, и следи да је $f(U(x,\delta)) \subseteq U(f(x), \varepsilon)$. $\square$

**Теорема 2.** *Ако је функција* $f \colon X \to Y$ *непрекидна у тачки* $x_0$*, а функција* $g \colon Y \to Z$*, у тачки* $f(x_0)$*, онда је функција* $g \circ f$ *непрекидна у тачки* $x_0$*.*

*Доказ.* Нека је $y_0 = f(x_0)$ и $z_0 = g \circ f(x_0) = g(f(x_0)) = g(y_0)$. Узмимо произвољну $\varepsilon$-околину $U(z_0, \varepsilon)$ тачке $z_0$. Како је $g$ непрекидна функција у тачки $y_0$, то постоји $\varepsilon'$-околина $U(y_0, \varepsilon')$ тачке $y_0$ таква да је $g(U(y_0, \varepsilon')) \subseteq U(z_0, \varepsilon)$. Слично, из непрекидности функције $f(x)$ следи да постоји $\delta$-околина $U(x_0, \delta)$ тачке $x_0$ таква да је $f(U(x_0, \delta)) \subseteq U(y_0, \varepsilon')$. Одавде је $g(f(U(x_0, \delta)) \subseteq g(U(y_0, \varepsilon'))$, што заједно са $g(U(y_0, \varepsilon')) \subseteq U(z_0, \varepsilon)$ даје $g(f(U(x_0, \delta)) \subseteq U(z_0, \varepsilon)$, што је и требало да се покаже. $\square$

**Последица 1.** *Композиција две непрекидне функције је непрекидна функција.*

Остављамо читаоцу (као не много тежак задатак) да докаже следећа тврђења.

**Теорема 3.** *Ако је функција $f : X \to Y$ непрекидна у тачки $x_0$ и $E \subseteq X$ произвољан подскуп простора $X$, који садржи тачку $x_0$, тада је и рестрикција $f|_E : E \to Y$ функције $f$ на скуп $E$ непрекидна у тачки $x_0$.*

**Последица 2.** *Ако је функција $f : X \to Y$ непрекидна и $E \subseteq X$ произвољан подскуп простора $X$, тада је и рестрикција функције $f$ на скуп $E$ непрекидна функција.*

**Пример 2.** Нека су $(X_1, d_{X_1})$ и $(X_2, d_{X_2})$ два метричка простора. Функције $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ и $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$, где је $p_1(x_1, x_2) = x_1$ и $p_2(x_1, x_2) = x_2$ за свако $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, се зову редом *прва* и *друга пројекција*.

На скупу $X_1 \times X_2$ уведимо метрике које су по аналогији изведене из метрика $d_1$, $d_2$ и $d_\infty$ дефинисаних на скупу $\mathbf{R}^2$; аналогија је толико очигледна да у овом случају чак остављамо исте ознаке. Дакле, нека су $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ произвољне тачке простора $X_1 \times X_2$. Тада уведимо на скупу $X_1 \times X_2$ следеће метрике:

$$d_1(x, y) = d_{X_1}(x_1, y_1) + d_{X_2}(x_2, y_2), \quad d_2(x, y) = \sqrt{[d_{X_1}(x_1, y_1)]^2 + [d_{X_2}(x_2, y_2)]^2}$$
$$d_\infty(x, y) = \max\{d_{X_1}(x_1, y_1), d_{X_2}(x_2, y_2)\}$$

Није тешко показати да ако узмемо на скупу $X_1 \times X_2$ било коју од наведених метрика, онда су пројекције непрекидне функције. Покажимо то за метрику $d_2$ и пројекцију $p_1$. Треба показати да је прва пројекција непрекидна у произвољној тачки простора $X_1 \times X_2$. Узмимо стога произвољну тачку $(x_0, y_0) \in X_1 \times X_2$ и произвољно $\varepsilon > 0$ (погледајте одговарајућу дефиницију). Покажимо да је довољно узети да је $\delta = \varepsilon$. Наиме, из $d_{X_1}(x_0, x) \leq \sqrt{[d_{X_1}(x_0, x)]^2 + [d_{X_2}(y_0, y)]^2}$ и $\sqrt{[d_{X_1}(x_0, x)]^2 + [d_{X_2}(y_0, y)]^2} < \delta$ следи

$$d_{X_1}(p_1(x_0, y_0), p_1(x, y)) = d_{X_1}(x_0, x) < \delta = \varepsilon,$$

што је и требало показати. $\square$

**Пример 3.** Функција сабирања реалних бројева $+ : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ је непрекидна. Наиме, узмимо произвољну тачку $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Треба показати да важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2)$$
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon.$$

Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Покажимо да за $\delta = \varepsilon/2$ горња формула важи. Очигледно је, да из $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \varepsilon/2$ следи $|x-x_0| < \varepsilon/2$ и $|y-y_0| < \varepsilon/2$. Сада наша формула је тачна, јер је

$$|(x+y)-(x_0+y_0)| \leq |x-x_0| + |y-y_0| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \square$$

**Пример 4.** Покажимо да је множења реалних бројева $\cdot : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ такође пример једне непрекидне функције. Узмимо стога произвољну тачку $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Нека је $M > 0$ такво да је $|x_0| < M$ и $|y_0| < M$. Треба показати да важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2)\ \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |xy - x_0 y_0| < \varepsilon.$$

Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Покажимо да за $\delta = \min\{1, \varepsilon/3, \varepsilon/(3M)\}$ горња формула важи. Из $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ следи $|x-x_0| < \delta$ и $|y-y_0| < \delta$, па имамо

$$\begin{aligned}|xy - x_0y_0| = |x_0(y-y_0) + (x-x_0)(y-y_0) + y_0(x-x_0)| \leq |x_0||y-y_0| +\\ + |x-x_0||y-y_0| + |y_0||x-x_0| < M\frac{\varepsilon}{3M} + 1\cdot\frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon. \square\end{aligned}$$

**Пример 5.** Ако су функције $f\colon E \to \mathbf{R}$ и $g\colon E \to \mathbf{R}$, где је $E \subseteq \mathbf{R}$, непрекидне, онда је и функција $h : E \to \mathbf{R}^2$, где је $h(x) = (f(x), g(x))$, такође непрекидна. Узмимо произвољно $x_0 \in E$. Треба доказати да важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)\ |x-x_0| < \delta \Rightarrow \sqrt{(f(x)-f(x_0))^2 + (g(x)-g(x_0))^2} < \varepsilon.$$

Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Пошто су функције $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне, то постоје реални бројеви $\delta'$ и $\delta''$ такви да за свако $x \in E$ из $|x-x_0| < \delta'$ следи $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon/2$, а из $|x-x_0| < \delta''$ следи $|g(x)-g(x_0)| < \varepsilon/2$. Али тада за свако $x \in E$ такво да је $|x-x_0| < \delta = \min\{\delta', \delta''\}$ добијамо

$$\begin{aligned}&\sqrt{(f(x)-f(x_0))^2 + (g(x)-g(x_0))^2} \leq\\ &\qquad \leq |f(x)-f(x_0)| + |g(x)-g(x_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

што је и требало да се покаже. $\square$

**Пример 6.** Користећи претходне примере, покажимо да је сваки полином непрекидна функција.

Приметимо да ако су функције $f : E \to \mathbf{R}$ и $g : E \to \mathbf{R}$, где је $E \subseteq \mathbf{R}$, непрекидне, онда је и збир и производ тих функција такође непрекидна функција, јер је $f(x)+g(x) = (+\circ h)(x)$ и $f(x)\,g(x) = (\cdot \circ h)(x)$, где је $h$ функција из претходног примера. Применом математичке индукције добијамо да аналогно тврђење важи и за $n$ таквих функција. Али тада непрекидност полинома следи из непрекидности идентичке функције $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}(x) = x$ и константне функције (непрекидност ових функција следи директно из дефиниције). $\square$

Веома важну класу непрекидних функција чине елементарне функције, које су непрекидне у свакој тачки у којој су дефинисане.

**Пример 7.** Покажимо да је функција $f(x) = \cos x$ свуда непрекидна функција. Узмимо произвољно $x_0 \in \mathbf{R}$. Треба показати да је

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbf{R})\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon.$$

Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Тада можемо узети да је $\delta = \varepsilon$, јер је

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2\, \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0| < \varepsilon. \square$$

**Теорема 4.** *Функција $f : X \to Y$ је непрекидна у тачки $x_0$ ако и само ако за сваки низ $(x_n)$ у $X$ који конвергира ка $x_0$ важи да низ слика $(f(x_n))$ у $Y$ конвергира ка $f(x_0)$.*

*Доказ.* Претпоставимо да је функција $f(x)$ непрекидна у тачки $x_0$, и нека низ $(x_n)$ конвергира ка $x_0$. Покажимо тада да је $(f(x_n)) \to f(x_0)$, тј. покажимо да важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x_n))) < \varepsilon.$$

Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Тада из непрекидности функције $f(x)$ у тачки $x_0$ следи да за дато $\varepsilon$ постоји $\delta > 0$ такво да је $f(U(x_0, \delta)) \subseteq U(f(x_0), \varepsilon)$. Али како $(x_n) \to x_0$, то за изабрано $\delta$ постоји $n_0$ такво да је за свако $n \geq n_0$ задовољено $x_n \in U(x_0, \delta)$, па је $f(x_n) \in U(f(x_0), \varepsilon)$, за свако $n \geq n_0$, што је и требало показати.

Претпоставимо сада да за сваки низ $(x_n)$ у $X$ који конвергира ка $x_0$ важи да низ слика $(f(x_n))$ у $Y$ конвергира ка $f(x_0)$, и да функција $f(x)$ није непрекидна у тачки $x_0$. Како функција $f(x)$ није непрекидна у тачки $x_0$, то постоји $\varepsilon_0 > 0$ такво да за свако $n \in \mathbf{N}$ постоји $y_n \in U(x_0, 1/n)$ за које важи $f(y_n) \notin U(f(x_0), \varepsilon_0)$. Из последње релације следи да низ $(f(y_n))$ не конвергира ка $f(x_0)$. С друге стране није тешко приметити да низ $(y_n) \to x_0$, па по претпоставци важи да $(f(y_n)) \to f(x_0)$. Из добијене контрадикције следи да је функција $f(x)$ непрекидна у тачки $x_0$. $\square$

За услов из дефиниције непрекидности кажемо да је *услов непрекидности изражен на "$\varepsilon$-$\delta$" језику*. Ако функција задовољава услов из претходне теореме, који је еквивалентан услову непрекидности, онда се често каже да је она *непрекидна по Хајнеу*. Претходна теорема даје нам за право да узмемо било који од ова два услова за дефиницију непрекидности.

Кажемо да функција $f\colon X \to \mathbf{R}$ *достиже своју највећу доњу* [*најмању горњу*] *границу*, ако постоји $\alpha = \inf_X f = \inf\{f(x) \,|\, x \in X\}$ [$\beta = \sup_X f = \sup\{f(x) \,|\, x \in X\}$] и постоји $x_0 \in X$ такво да је $f(x_0) = \alpha$ [$f(x_0) = \beta$] (таквих тачака као што је $x_0$ може бити више). Другим речима постоје $\alpha = \min_X f = \min\{f(x) \,|\, x \in X\}$ [$\beta = \max_X f = \max\{f(x) \,|\, x \in X\}$], па краће кажемо да функција $f$ *има минимум* [*максимум*] на $X$, или да функција $f$ *достиже свој минимум* [*максимум*] на $X$.

Све функције, о којима је надаље реч у овом поглављу, биће реалне функције реалне променљиве. Покажимо за овакве функције неколико веома важних ставова.

**Теорема 5.** [Вајерштрас] *Свака непрекидна на затвореном интервалу функција има на њему максимум* [*минимум*].

*Доказ.* Покажимо да непрекидна функција $f$ на затвореном интервалу $[a, b]$ има на њему максимум (слично се показује да она има на њему минимум). Нека је $A = f([a, b])$. Ако је $A$ коначно, онда је $\sup A = \max A \in A$, и тврђење је, очигледно испуњено. Стога можемо претпоставити да је $A$ бесконачан скуп.

Ако скуп $A$ није ограничен одозго, онда узмимо произвољно $y_1 \in A$. Затим нека је $y_2 \in A$, такво да је $y_2 > \max\{y_1, 2\}$, па $y_3 \in A$ такво, да је $y_3 > \max\{y_2, 3\}$ итд. Настављајући тако добићемо строго растући низ $(y_n)$ који у ширем смислу конвергира ка $+\infty$. За свако $y_i$ изаберимо једно $x_i$ такво да је $y_i = f(x_i)$. Низ $(x_n)$ је ограничен, па по Болцано-Вајерштрасовој теореми има конвергентни подниз $(x_{n_k})$; нека је $x_0$ тачка којој конвергира тај подниз. Како је функција $f(x)$ непрекидна, то из теореме 4 следи да $(y_{n_k}) \to f(x_0)$. С друге стране, подниз $(y_{n_k})$ није конвергентан, јер као подниз низа који у ширем смислу конвергира ка $+\infty$, такође, у ширем смислу конвергира ка $+\infty$. Из добијене контрадикције следи да је скуп $A$ ограничено одозго.

Дакле, $A$ је ограничен одозго, па постоји $c = \sup A$. Треба показати да је $c \in A$, па стога претпоставимо да то није тачно, тј. нека је $c \notin A$. Узмимо произвољно $y_1 \in A$ такво да је $y_1 > c - 1/2$. Такво $y_1$ постоји, јер број $c - 1/2$ није горња граница за скуп $A$. Пошто је $y_1 < c$, тачка $y_1 + (c - y_1)/2$ није горња граница скупа $A$, па постоји $y_2 \in A$ такво да је $y_1 + (c - y_1)/2 < y_2$. Како је $y_2 < c$, тачка $y_2 + (c - y_2)/2$ није горња граница скупа $A$, па постоји $y_3 \in A$ такво да је $y_2 + (c - y_2)/2 < y_3$ итд. Настављајући тако, добијамо строго растући низ $(y_n)$. За свако $n$ важи $|c - y_n| < 1/2^n$. Наиме за $n = 1$ ова релација, очигледно, важи. Претпоставимо да важи за неко $n$ и покажимо да онда важи за $n + 1$. Имамо

$$|c - y_{n+1}| < |c - y_n - (c - y_n)/2| = |c - y_n|/2 < 2^{-n}/2 = 1/2^{n+1}.$$

А сада пошто је $y_1 < y_2 < y_3 < \dots$, следи да $(y_n) \to c$. Сада за свако $y_i$ изаберимо једно $x_i$ такво да је $y_i = f(x_i)$. Низ $(x_n)$ је ограничен, па по Болцано-Вајерштрасовој теореми има конвергентни подниз $(x_{n_k})$. Нека тај подниз конвергира ка $x_0$. Како је функција $f(x)$ непрекидна, то из теореме 4 следи да $(y_{n_k}) \to f(x_0)$. Такође, из $(y_n) \to c$ следи $(y_{n_k}) \to c$. Дакле, добијамо да је $f(x_0) = c$. $\square$

**Теорема 6.** [Болцано-Коши] *Ако је функција $f$ непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$, $A = f(a)$ и $B = f(b)$, онда за свако $C$ између $A$ и $B$ постоји $\xi \in [a, b]$ такво да је $f(\xi) = C$.*

*Доказ.* Без ограничења општости можемо претпоставити да је $A < C < B$. Означимо $[a_1, b_1] = [a, b]$ и узмимо тачку $z_1 = (a_1 + b_1)/2$. Ако је $f(z_1) = C$, узмимо $C = z_1$ и теорема је показана. Ако је $C < f(z_1)$, онда нека је $[a_2, b_2] = [a_1, z_1]$, а ако је $f(z_1) < C$, онда нека је $[a_2, b_2] = [z_1, b_1]$. Узмимо сада тачку $z_2 = (a_2 + b_2)/2$. Ако је $f(z_2) = C$, узмимо $C = z_2$ и теорема је показана. Ако је $C < f(z_2)$, онда нека је $[a_3, b_3] = [a_2, z_2]$, а ако је $f(z_2) < C$, онда нека је $[a_3, b_3] = [z_2, b_2]$. Наставимо ову процедуру. Ако ни за једно $n$ није задовољено $f(z_n) = C$, ми добијамо бесконачни низ

$$[a_1, b_1] \subseteq [a_2, b_2] \subseteq [a_3, b_3] \subseteq \dots$$

уметнутих одсечака и притом је увек $f(a_n) \leq C \leq f(b_n)$. Дужина ових одсечака опада ка 0, па из Канторовог принципа уметнутих одсечака следи да је

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] = \xi,$$

где је $\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Али функција $f$ је непрекидна, па је

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Такође, из последице 6.2 следи да је

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le C \le \lim_{n\to\infty} f(b_n), \quad \text{односно} \quad f(\xi) \le C \le f(\xi),$$

па, напокон, добијамо $f(\xi) = C$. $\square$

Услови непрекидности функције и затворености интервала на коме се она посматра су од суштинског значаја за важење Вајерштрасове теореме. Наиме, функција $f(x) = x - [x]$ је на интервалу $[0,1)$ непрекидна, а на интервалу $[0,1]$ није непрекидна, али на овим интервалима не достиже своју најмању горњу границу (која је у оба случаја једнака 1).

Услов непрекидности функције је, такође, од суштинског значаја за важење Болцано-Кошијеве теореме. На пример, функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на интервалу $[0,1]$ не узима вредност $1/2$ која је између $0 = \operatorname{sgn} 0$ и $1 = \operatorname{sgn} 1$.

**Последица 3.** *Ако је функција $f$ непрекидна на интервалу $[a,b]$ и на његовим крајевима узима вредности разних знакова, онда је $f(\xi) = 0$ за неко $\xi \in (a,b)$.*

**Пример 8.** Посматрајмо квадратни трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a,b,c \in \mathbf{R}$; $a \ne 0$). Покажимо да ако је $5a + 3b + 2c = 0$, онда су све нуле од $f(x)$ реалне.

Довољно је показати да $f(x)$ има барем једну реалну нулу. Видели смо раније да су сви полиноми непрекидне функције, па је и $f(x)$ таква функција. Приметимо да је $f(1) + f(2) = 5a + 3b + 2c = 0$. Ако је $f(1) = 0$ или $f(2) = 0$, онда наш квадратни трином има реалне нуле. Значи, можемо претпоставити да је $f(1) \ne 0$ и $f(2) \ne 0$. Али тада из $f(1) + f(2) = 0$ следи да је $f(1)f(2) < 0$, па из претходне последице Болцано-Кошијеве теореме добијамо да $f(x)$ има обавезно једну реалну нулу на интервалу $(1,2)$. $\square$

**Последица 4.** *Ако је функција $f$ непрекидна на интервалу $[a,b]$, онда је она на њему ограничена и $f([a,b]) = [m,M]$, где је $m = \inf_{[a,b]} f$ и $M = \sup_{[a,b]} f$.*

*Доказ.* Ограниченост функције $f$ на $[a,b]$ следи директно из Вајерштрасове теореме. Такође, из Вајерштрасове теореме следи да постоје $a_1$ и $b_1$ из $[a,b]$ такви да је $f(a_1) = m$ и $f(b_1) = M$. Без ограничења општости можемо претпоставити да је $a_1 < b_1$. Тада из Болцано-Кошијеве теореме добијамо да за свако $c$, $m < c < M$, постоји $x \in (a_1, b_1)$такво да је $c = f(x)$, па је заиста $f([a,b]) = [m,M]$. $\square$

За реалне функције реалне променљиве уопштимо појам инверзне функције. Нека је $f : X \to \mathbf{R}$, $X \subseteq \mathbf{R}$, инјективна реална функција реалне променљиве, и нека је $Y = f(X)$. Функцију из $Y$ у $\mathbf{R}$, која $f(x)$ слика у $x$ за свако $x \in X$, а која очигледно постоји, зовемо *инверзном функцијом* функције $f$ и означавамо је са $f^{-1}$. Покажимо сада једну теорему за строго монотоне реалне функције реалне промењиве.

**Лема 1.** *Ако функција* $f: X \to \mathbf{R}$, $X \subseteq \mathbf{R}$, *строго расте* [*опада*] *на* $X$, *онда постоји њена инверзна функција* $f^{-1}$ *и она строго расте* [*опада*] *на* $Y = f(X)$.

*Доказ.* Фунција $f^{-1}$ постоји, јер је функција $f': X \to Y$, где је $f'(x) = f(x)$ за свако $x \in X$, бијекција. Посматрајмо случај када је $f(x)$ строго растућа функција (аналогно се разматра и случај строго опадајуће функције). Треба показати да је функција $f^{-1}: Y \to \mathbf{R}$ строго растућа. Узмимо произвољно $y_1, y_2 \in Y$ и нека је $y_1 < y_2$. Нека су $x_1, x_2 \in X$ такви да је $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$. Тада је $x_1 = f^{-1}(y_1)$ и $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Ако претпоставимо да је $x_2 \leq x_1$, онда из чињенице да је $f(x)$ строго растућа имамо да је $y_2 = f(x_2) \leq y_1 = f(x_1)$, што је немогуће. Дакле, имамо да је

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

што је и требало да се покаже. □

**Теорема 7.** *Ако функција* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *строго расте* [*опада*] *и непрекидна је на* $[a, b]$, *тада функција* $f^{-1}$ *строго расте* [*опада*] *и непрекидна је на интервалу* $[f(a), f(b)]$ $[f(b), f(a)]$.

*Доказ.* Размотримо случај када функција $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ строго расте. Из последице 4 и леме 1 следи да треба показати још само да је функција $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to \mathbf{R}$ непрекидна. Узмимо произвољну унутрашњу тачку $y_0$ интервала $[f(a), f(b)]$ (случај када је $y_0 = f(a)$ или $y_0 = f(b)$ разматрамо слично). Тада је и тачка $x_0 = f^{-1}(y_0)$ унутрашња тачка интервала $[a, b]$. Узмимо произвољно $\varepsilon > 0$. Без ограничења општости можемо претпоставити да за изабрано $\varepsilon$ важи $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$. Тада је

$$f(a) \leq f(x_0 - \varepsilon) < y_0 = f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon) \leq f(b),$$

па постоји $\delta$-околина тачке $y_0$ за коју важи да је

$$(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)).$$

Из последњег следи да је

$$f^{-1}[(y_0-\delta, y_0+\delta)] \subseteq (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon),$$

па је функција $f^{-1}$ непрекидна у тачки $y_0$. $\square$

## 1.5. Униформна непрекидност

Функција $f\colon X \to Y$ је *униформно непрекидна* ако је

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in X)(\forall x'\in X)\ d_X(x,x')<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon.$$

Подсетимо се да је функција $f\colon X \to Y$ непрекидна, ако је непрекидна у свакој тачки $x$ из $X$, тј. ако важи формула

$$(\forall x\in X)(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x'\in X)\ d_X(x,x')<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(x'))<\varepsilon,$$

која се из претходне формуле добија тако што се трећи по реду квантификатор пребаци на прво место. Упоређујући последње две формуле сада није тешко доћи до следећег закључка.

**Теорема 8.** *Ако је функција униформно непрекидна, онда је она и непрекидна.*

Приметимо да се последње две формуле доста разликују, јер у првој од њих $\delta$ зависи само од $\varepsilon$, а у другој и од $\varepsilon$ и од $x$. Ова разлика је суштинска и за последицу има да тврђење обрнуто тврђењу теореме 8 не важи, тј. из непрекидности не следи униформна непрекидност. Да је то заиста тако показује следећи пример.

**Пример 9.** Посматрајмо функцију $f\colon \mathbf{R}\backslash\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x)=1/x$. Узмимо низ $x_n = 1/n$. Како $(1/n)\to 0$, то је низ $(1/n)$ Кошијев, па важи

$$(\forall\delta>0)(\exists n_0\in\mathbf{N})(\forall m,n\in\mathbf{N})\ m,n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|<\delta. \tag{1}$$

Покажимо да функција $f$ није униформно непрекидна, тј. да је формула

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x,x'\in X)\ d_X(x,x')<\delta \wedge d_Y(f(x),f(x'))\geq\varepsilon$$

тачна. Покажимо да је она тачна за $\varepsilon = 1$. Узмимо произвољно $\delta > 0$. Тада из (1) следи да постоје $m$ и $n$, $m \neq n$, тако да за вредности $x_1 = 1/m$ и $x_2 = 1/n$ важи $|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \delta$ и $|f(x_1) - f(x_2)| = |m - n| \geq 1$. □

За функцију $f : X \to Y$ кажемо да је *униформно непрекидна на скупу* $E$, где је $E \subseteq X$, ако је рестрикција $f|_E$ функције $f$ на скуп $E$ униформно непрекидна.

Подскуп $A$ метричког простора $X$ је *компактан* ако се из сваког низа у $A$ може издвојити подниз који конвергира у $A$, тј. конвергира ка некој тачки из $A$. Следећа теорема даје важан критеријум за утврђивање компактности скупова у простору $\mathbf{R}^n$.

**Теорема 9.** *Скуп $F$ у простору $\mathbf{R}^n$ је компактан акко је ограничен и затворен у њему.*

*Доказ.* Претпоставимо да је $F$ компактан и неограничен у $\mathbf{R}^n$. Узмимо произвољно $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Како је скуп $F$ неограничен, то је $F \backslash U(x_0, n)$ непразан скуп за свако $n \in \mathbf{N}$. За свако $n \in \mathbf{N}$ изаберимо $x_n \in F \backslash U(x_0, n)$. Низ $(x_n)$ лежи у компактном скупу $F$, па постоји тачка нагомилавања $y_0 \in F$ овог низа. Очигледно да за довољно велико $n_0$ важи $y_0 \in U(x_0, n_0)$, па у околини $U(x_0, n_0)$ лежи бесконачно много чланова низа $(x_n)$, што је немогуће. Из добијене контрадикције следи да ако је $F$ компактан, онда је он ограничен.

Претпоставимо сада да је $F$ компактан и није затворен у $\mathbf{R}^n$. Али тада скуп $\mathbf{R}^n \backslash F$ није отворен, па постоји тачка $x_0 \in \mathbf{R}^n \backslash F$, таква, да је $U(x_0, 1/n) \cap F \neq \emptyset$ за свако $n \in \mathbf{N}$. За свако $n \in \mathbf{N}$ изаберимо $x_n \in U(x_0, 1/n) \cap F$. Низ $(x_n)$ конвергира ка тачки $x_0$, па је она његова јединствена тачка нагомилавања. Ово је немогуће, јер је $x_0 \in \mathbf{R}^n \backslash F$, а $F$ је компактан. Из добијене контрадикције следи да из компактности следи затвореност скупа.

Покажимо сада да из услова да је $F$ затворен и ограничен следи да је компактан. Узмимо произвољан низ $(x_n)$ из $F$. Како је $F$ ограничен, то је и низ $(x_n)$ ограничен, па из теореме 23 глава 6, следи да има конвергентан подниз. Нека тај подниз конвергира ка тачки $x_0$. Тачка $x_0$ је тачка нагомилавања узетог низа и она (види теорему 4 из главе 6) припада скупу $F$. Дакле скуп $F$ је компактан. □

Покажимо неколико тврђења која се односе на компактне скупове у метричком простору.

**Теорема 10.** *Ако је функција $f\colon E \to Y$ подскупа $E$ метричког простора $(X, d_X)$ у метрички простор $(Y, d_y)$ непрекидна и скуп $E$ је компактан у $X$, тада је и скуп $f(E)$ компактан у $Y$.*

*Доказ.* Узмимо произвољан низ $(y_n)$ из $f(E)$. Уочимо $x_n \in f^{-1}(y_n)$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Низ $(x_n)$ лежи у компактном скупу $E$, па има тачку нагомилавања $x_0 \in E$. Нека је $y_0 = f(x_0) \in f(E)$. Покажимо да је $y_0$ тачка нагомилавања за $(y_n)$. Треба показати да важи формула

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbf{N})(\exists n' \in \mathbf{N})\, n' > n \wedge d_Y(y_0, y_{n'}) < \varepsilon.$$

Узмимо произвољне $\varepsilon_0 > 0$ и $n_0 \in \mathbf{N}$. Из непрекидности функције $f$ следи да постоји $\delta_0 > 0$ тако да важи

$$f[U(x_0, \delta_0)] \subseteq U(y_0, \varepsilon_0).$$

Како је $x_0$ тачка нагомилавања за $(x_n)$, то постоји $n_0' > n_0$ тако да је $x_{n_0'} \in U(x_0, \delta_0)$. Одавде добијамо да $y_{n_0'} = f(x_{n_0'}) \in U(y_0, \varepsilon_0)$. □

**Теорема 11.** [Вајерштрасова теорема] *Ако је функција $f : E \to \mathbf{R}$ непрекидна реална функција компактног подскупа $E$ метричког простора $X$, тада $f$ достиже свој максимум и минимум.*

*Доказ.* Из теореме 10 следи да је $f(E)$ компактан у $\mathbf{R}$. Сада из теореме 9 следи да је $f(E)$ ограничен и затворен, па из теореме 10 из главе 5 следи да постоје $y_{\min} = \min f(E)$ и $y_{\max} = \max f(E)$. Дакле, постоје елементи $x_{\min}$ и $x_{\max}$ из $E$ такви да је $f(x_{\min}) = y_{\min}$ и $f(x_{\max}) = y_{\max}$. □

Следећа теорема тврди да ипак под неким "лепим" условима важи обрат теореме 8.

**Теорема 12.** [Кантор] *Ако је функција $f$ непрекидна на компактном подскупу $E$ метричког простора $X$, онда је она и униформно непрекидна на $E$.*

*Доказ.* Претпоставимо да то није тачно, тј. постоји функција $f\colon E \to Y$, где је $E$ компактно, за коју важи да постоји $\varepsilon_0 > 0$ тако да се за свако $\delta > 0$ могу наћи тачке $x'_\delta, x''_\delta \in E$ такве да је $d_X(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$, а да је при томе $d_X(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) \geq \varepsilon_0$. Уочимо низове $x'_n = x'_{\delta_n}$ и $x''_n = x''_{\delta_n}$, где је $\delta_n = 1/n$ за свако $n \in \mathbf{N}$. Тада из компактности скупа $E$ следи да постоје поднизови $(x'_{n_k})$ и $(x''_{n_k})$ редом низова $(x'_n)$ и $(x''_n)$ који конвергирају редом ка тачкама $\xi$ и $\xi'$ из $E$. Али како за свако $k$ важи $d_X(x'_{n_k}, x''_{n_k})) < 1/n_k$, то је $\xi = \xi'$. Из непрекидности функције $f$ имамо да је $(f(x'_{n_k})) \to f(\xi)$ и $(f(x''_{n_k})) \to f(\xi)$, а одавде следи да за вредност $\varepsilon_0/2$ постоји $k_0$ такво да за свако $k \geq k_0$ важи да је $d_Y(f(\xi), f(x'_{n_k})) < \varepsilon_0/2$ и $d_Y(f(\xi), f(x''_{n_k})) < \varepsilon_0/2$, па је $d_Y(f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k})) < \varepsilon_0$, што је у контрадикцији са претпоставком. $\square$

**Теорема 13.** *Ако је функција* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *непрекидна на* $[a, b]$, *онда је она униформно непрекидна на* $[a, b]$.

*Доказ.* Интервал $[a, b]$ је затворен и ограничен у $\mathbf{R}$, па је компактан (види теорему 9). Сада из претходне теореме следи наше тврђење. $\square$